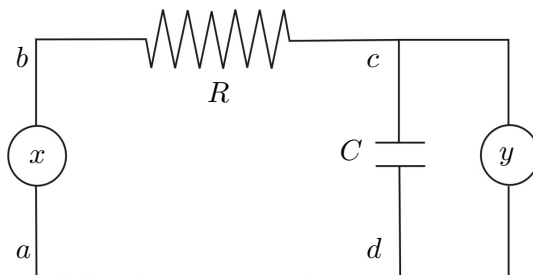


Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Demonstraatio 3, 9.5.2023

1. Kirjoita differentiaaliyhtälö kuvan piirin syöttöjännitteen x (input) ja mitattavan jännitteen y (output) välille ja tulkitse piiri signaalia muokkaavaksi laitteeksi: jännite x olkoon syöte ja y tuloste. Selvitä millä tavalla $y(t)$:n spektri $Y(f)$ riippuu $x(t)$:n spektristä $X(f)$. Selvitä lopuksi miten $y(t)$:n amplitudispektri voidaan esittää $x(t)$:n amplitudispektrin avulla.

Ohje: Jännite y on sama kuin pisteiden c ja d välinen jännite. Merkitse piirissä $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ kulkevaa virtaa I :llä ja käytä Kirchhoffin sääntöjä sekä sähkötekniikan perusyhtälöitä $U = RI$, $U = \frac{Q}{C}$ ja $I = C \frac{dU}{dt}$. Mittarin y kautta kulkeva virta oletetaan nollassa. Laske saadusta differentiaaliyhtälöstä Fourier-muunnokset ja lopuksi spektrien itseisarvot.



2. Signaalista $f(x)$ on saatu 1000 näytettä aikavälillä $[0, 1]$ tasaisin väliajoin, mikä merkitsee sitä, että signaalia esittää jono $(f_0, f_1, \dots, f_{999})$. Tämän signaalin diskreetti Fourier-muunnos on jono $(F_0, F_1, \dots, F_{999})$. Minkä taajuuden amplitudia tällöin edustavat F_{11} , F_{499} , F_{782} ja F_{946} ?
3. Etsi 2×2 -matriisi U , joka toteuttaa 2-pituisten jonojen diskreetin Fourier-muunnoksen:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

Mikä on U :n käänteismatriisi? Ohje: Määritä ensin muunnos luonnollisen kannan vektoreille $(1, 0)^T$ ja $(0, 1)^T$.

4. Olkoon $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}) = \text{DFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ ja $(G_0, G_1, \dots, G_{N-1}) = \text{DFT}(g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$. Sijoita summaan

$$\sum_{r=0}^{N-1} G_r F_{l-r}$$

lauseke F_{l-r} :lle, vaihda summausjärjestys ja sievennä mahdollisimman pitkälle. Tulkitse näin saatu yhtälö vertaamalla sitä Fourier-muunnosten konvoluutioon.

5. *Neoconocephalus robustus* -lajin hepokatti tuottaa 6,6 kHz taajuisen, yli kilometrin päähän kuuluvan äänen. *Nikon Coolpix 5200* -kameran mikrofoni ei silti taltioi sen ääntä edes lähietäisyydeltä. Mitä voidaan tällöin päätellä taajuudesta, jolla mikrofoni taltioi ääninäytteitä?
6. Laske jonon $(8, 1, 8, 0)$ diskreetti Fourier-muunnos käyttämällä FFT-algoritmia.