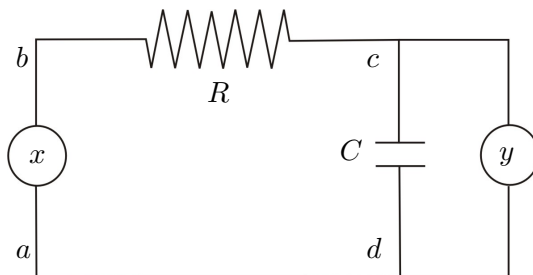


# Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

## Demonstraatio 3, 9.5.2023

1. Kirjoita differentiaaliyhtälö kuvan piirin syöttöjännitteen  $x$  (input) ja mitattavan jännitteen  $y$  (output) välille ja tulkitse piiri signaalia muokkaavaksi laitteen: jännite  $x$  olkoon syöte ja  $y$  tuloste. Selvitä millä tavalla  $y(t)$ :n spektri  $Y(f)$  riippuu  $x(t)$ :n spektristä  $X(f)$ . Selvitä lopuksi miten  $y(t)$ :n amplitudispektri voidaan esittää  $x(t)$ :n amplitudispektrin avulla.

Ohje: Jännite  $y$  on sama kuin pisteiden  $c$  ja  $d$  välinen jännite. Merkitse piirissä  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$  kulkevaa virtaa  $I$ :llä ja käytä Kirchhoffin sääntöjä sekä sähkötekniikan perusyhtälöitä  $U = RI$ ,  $U = \frac{Q}{C}$  ja  $I = C \frac{dU}{dt}$ . Mittarin  $y$  kautta kulkeva virta oletetaan nolaksi. Laske saadusta differentiaaliyhtälöstä Fourier-muunnokset ja lopuksi spektrien itseisarvot.



Mallivastaus:  $x = RI + \frac{Q}{C} = RCy' + y$ .

Merkitään  $X(f) = \mathcal{F}[x(t)](f)$  ja  $Y(f) = \mathcal{F}[y(t)](f)$ , jolloin

$$X = RC \cdot 2\pi i f Y + Y = (2\pi i f RC + 1)Y$$

ja siis

$$Y = \frac{1}{2\pi i f RC + 1} X,$$

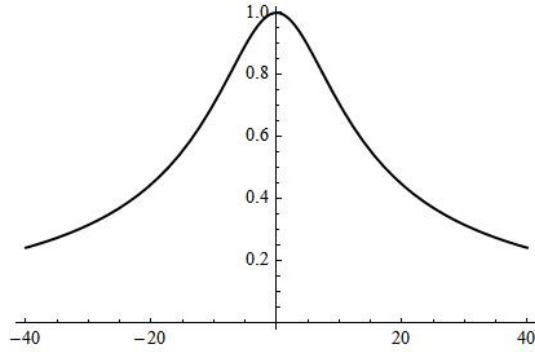
mistä

$$|Y| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi RC f)^2}} |X|.$$

Jos merkitään  $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ , saa viimeisin yhtälö muodon

$$|Y| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_0})^2}} |X|.$$

**Tulkintaa:** Funktion  $H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_0})^2}}$  graafinen esitys (alla kuva arvolla  $f_0 = 10$ ) tarjoaa selityksen siihen, miksi tehtävän piiriä kutsutaan *alipäästö-suodattimeksi*. Funktion  $H(f)$  arvo on lähellä lukua 1 kun taajuus  $f$  on lähellä nolla, mutta  $f$ :n kasvaessa itseisarvoltaan suuremmaksi arvon  $H(f)$  lähenee nollaa.



Mikäli tehtävän piiri ajatellaan laitteeksi, joka muokkaa lähtöjännitteestä  $x$  (input) tulostejännitteen (output), voidaan todeta että yhtälön  $|Y| = H(f) |X|$  perusteella lähellä nollaa olevat taajuuudet signaalissa  $x$  eivät vaimene paljoakaan, mutta kaukana nollasta olevat taajuuudet vaimenevat paljon:  $H(f)$  toimii vaimennuskertoimena.  $H(f)$  onkin ideaalisen pulssifunktion reaalinen vastine, joka voidaan toteuttaa passiivisilla (eivät tarvitse ulkoista virtalähdettä) komponenteilla tässä tapauksessa, jossa signaalia edustaa jännitteen vaihtelu.

2. Signaalista  $f(x)$  on saatu 1000 näytettä aikavälillä  $[0, 1]$  tasaisin väliajoin, mikä merkitsee sitä, että signaalia esittää jono  $(f_0, f_1, \dots, f_{999})$ . Tämän signaalin diskreetti Fourier-muunnos on jono  $(F_0, F_1, \dots, F_{999})$ . Minkä taajuuden amplitudia tällöin edustavat  $F_{11}$ ,  $F_{499}$ ,  $F_{782}$  ja  $F_{946}$ ?

Mallivastaus: Taajuuudet ovat 11, 499,  $1000 - 782 = 218$  ja  $1000 - 946 = 54$

3. Etsi  $2 \times 2$ -matriisi  $U$ , joka toteuttaa 2-pituisten jonojen diskreetin Fourier-muunnoksen:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

Mikä on  $U$ :n käänteismatriisi? Ohje: Määritä ensin muunnos luonnollisen kannan vektoreille  $(1, 0)^T$  ja  $(0, 1)^T$ .

Vastaus: Jos  $(F_0, F_1) = \text{DFT}(f_0, f_1)$ , on

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^1 f_k e^{-\frac{2\pi i k \cdot 0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_0 + f_1)$$

ja

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^1 f_k e^{-\frac{2\pi i k \cdot 1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_0 - f_1)$$

mistä voidaan laskea  $\text{DFT}(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$  sekä  $\text{DFT}(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ . Näin ollen

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tästä voidaan määrittää  $U^{-1} = U$ .

4. Olkoon  $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}) = \text{DFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$  ja  $(G_0, G_1, \dots, G_{N-1}) = \text{DFT}(g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$ . Sijoita summaan

$$\sum_{r=0}^{N-1} G_r F_{l-r}$$

lauseke  $F_{l-r}$ :lle, vaihda summausjärjestys ja sievennä mahdollisimman pitkälle. Tulkitse näin saatu yhtälö vertaamalla sitä Fourier-muunnosten konvoluutioon.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} G_r F_{l-r} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} G_r \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i k(l-r)}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} G_r \frac{1}{\sqrt{N}} f_k e^{-\frac{2\pi i k l}{N}} e^{\frac{2\pi i k r}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i k l}{N}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} G_r e^{\frac{2\pi i k r}{N}}}_{g_k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k g_k e^{-\frac{2\pi i k l}{N}}. \end{aligned}$$

Viimeisin lauseke on tulojonon  $(f_0 g_0, f_1 g_1, \dots, f_{N-1} g_{N-1})$  diskreetin Fourier-muunnoksen  $l$ :s alkio. Saatu kaava on siis diskreettien Fourier-muunnosten konvoluutio.

5. *Neoconocephalus robustus* -lajin hepokatti tuottaa 6,6 kHz taajuisen, yli kilometrin päähän kuuluvan äänen. *Nikon Coolpix 5200* -kameran mikrofoni ei silti taltioi sen ääntä edes lähietäisyydeltä. Mitä voidaan tällöin päätellä taajuudesta, jolla mikrofoni taltioi ääninäytteitä?

Mallivastaus: Taltiointitaajuus on pienempi kuin  $2 \cdot 6,6 \text{ kHz} = 13,2 \text{ kHz}$ .

6. Laske jonon  $(8, 1, 8, 0)$  diskreetti Fourier-muunnos käyttämällä FFT-algoritmia.

Mallivastaus: Lasketaan ensin  $\text{FFT}(8, 8)$  ja  $\text{FFT}(1, 0)$ . Ensimmäistä varten todetaan, että  $\text{FFT}(8) = (8)$ , joten

$$\text{FFT}(8, 8) = \frac{1}{\sqrt{2}}(8 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 0}{2}} 8, 8 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 1}{2}} 8) = \frac{1}{\sqrt{2}}(16, 0).$$

Samoin  $\text{FFT}(1) = (1)$  ja  $\text{FFT}(0) = (0)$ , joten

$$\text{FFT}(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 0}{2}} 0, 1 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 1}{2}} 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

Täten

$$\begin{aligned} &\text{FFT}(8, 1, 8, 0) \\ &= \frac{1}{2}(16 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 0}{4}} \cdot 1, 0 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 1}{4}} \cdot 1, 16 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 2}{4}} \cdot 1, 0 + e^{-\frac{2\pi i \cdot 3}{4}} \cdot 1) \\ &= \frac{1}{2}(16 + 1, 0 - i \cdot 1, 16 - 1, 0 + i \cdot 1) = \frac{1}{2}(17, -i, 15, i). \end{aligned}$$