

Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

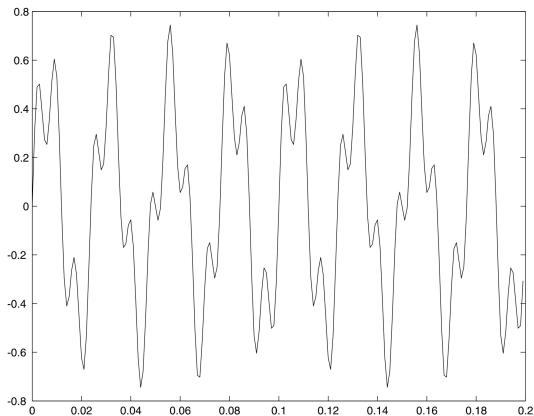
Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Signaali

$$s(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 40t) + \frac{1}{4} \sin(2\pi \cdot 130t)$$

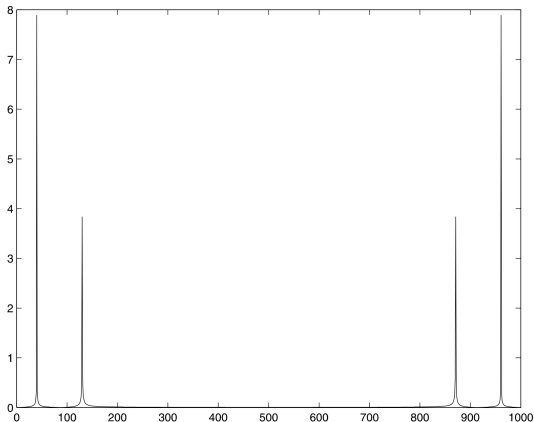


Fourier-analyysi

Signaalin

$$s(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 40t) + \frac{1}{4} \sin(2\pi \cdot 130t)$$

(amplitudi)spektri:

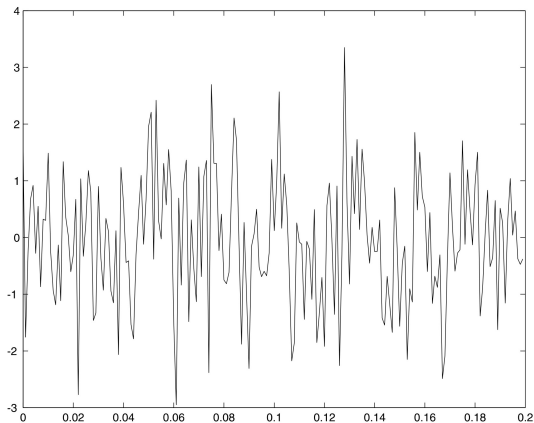


Fourier-analyysi

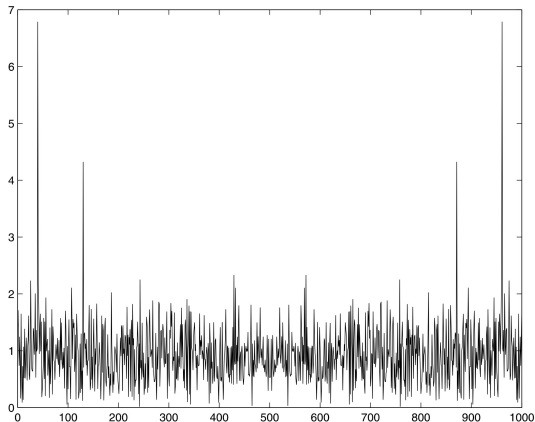
Signaali

$$s(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 40t) + \frac{1}{4} \sin(2\pi \cdot 130t)$$

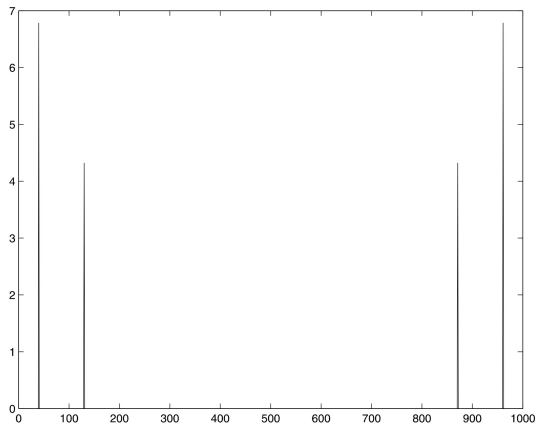
plus kohina (white noise):



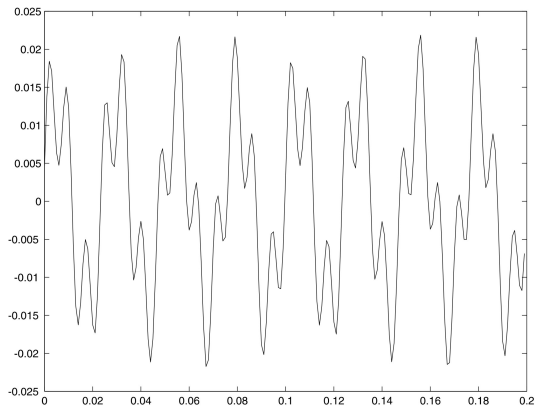
Edellisen (amplitudi)spektri



Spektri "puhdistettuna"



Tästä rekonstruoitu signaali



Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
- Mitä "ääretön summa" tarkoittaa?

Vertaa:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) dx.$$

Sarja määritellään analogisesti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^M a_n.$$

Lause

Jos f on vähenevä ja $f(x) \geq 0$, on

$$\int_1^{\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(t) dt$$

Integraaliesitys

Summaesitys

$$F(x) = a_1 f(1, x) + a_2 f(2, x) + \dots + a_n f(n, x)$$

voidaan yleistää integraaliksi

$$F(x) = \int_a^b a(t) f(t, x) dt,$$

mikä voidaan vielä yleistää I lajin epäoleelliseksi integraaliksi

$$F(x) = \int_a^\infty a(t) f(t, x) dt.$$

Sarjaesitys

Summaesitys

$$F(x) = a_1 f(1, x) + a_2 f(2, x) + \dots + a_n f(n, x)$$

voidaan yleistää myös sarjaksi:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(n, x).$$

Yhteenveto

- Summa: $F(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$
- Sarja: $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$
- Integraali: $F(x) = \int_a^b a(t) f(t, x) dt$
- Epäoleellinen integraali: $F(x) = \int_1^{\infty} a(t) f(t, x) dt$

sin, cos, exp

- f -taajuinen sinifunktio $s_f(x) = \sin(2\pi fx)$
- f -taajuinen kosinifunktio $c_f(x) = \cos(2\pi fx)$
- f -taajuiset eksponenttifunktiot $e_{+f}(x) = e^{2\pi ifx}$ ja $e_{-f}(x) = e^{-2\pi ifx}$

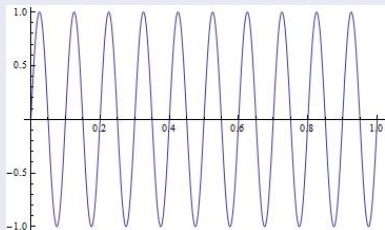
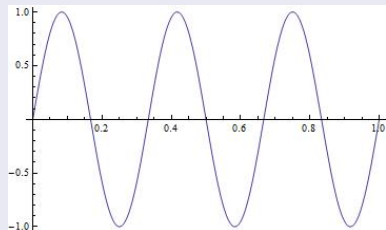
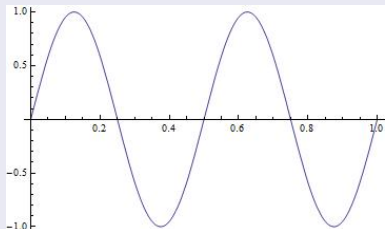
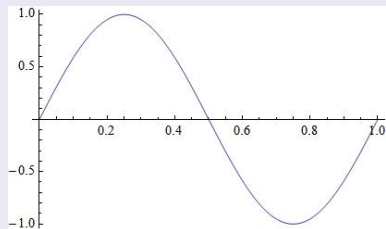
Eulerin kaava:

$$e_{+f}(x) = c_f(x) + is_f(x) \quad \text{ja} \quad e_{-f}(x) = c_f(x) - is_f(x)$$

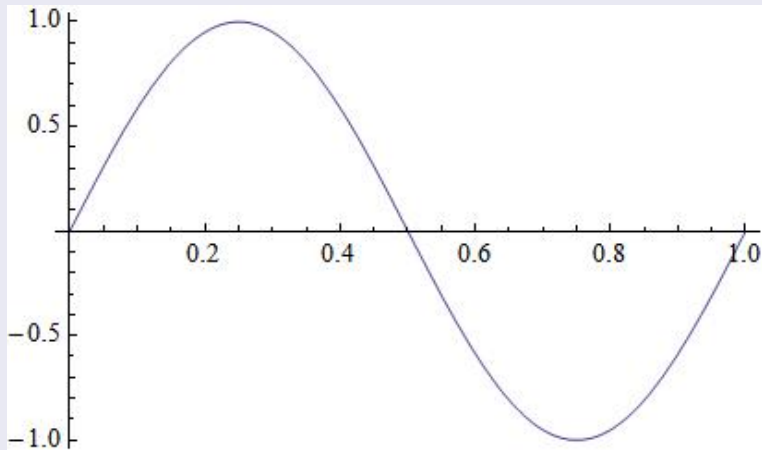
$$c_f(x) = \frac{1}{2}(e_{+f}(x) + e_{-f}(x)) \quad \text{ja} \quad s_f(x) = \frac{1}{2i}(e_{+f}(x) - e_{-f}(x))$$

Fourier-analyysi

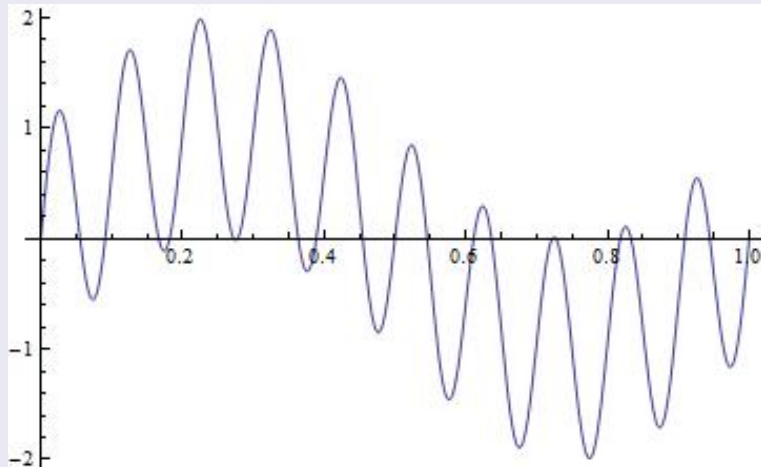
$s_1(x), s_2(x), s_3(x), s_{10}(x)$



$s_1(x)$

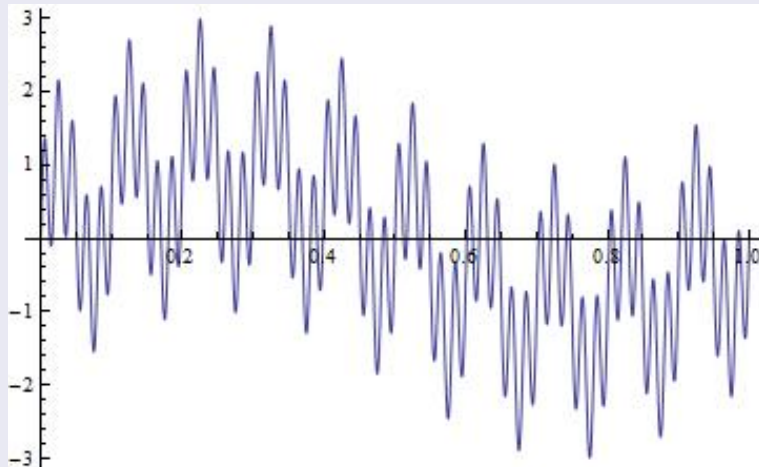


$$s_1(x) + s_{10}(x)$$

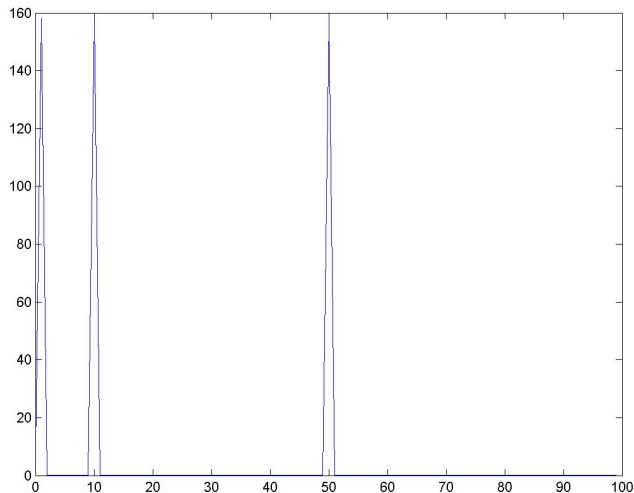


Fourier-analyysi

$$s_1(x) + s_{10}(x) + s_{50}(x)$$



Amplitudispektri (osittain)



Fourier-analyysi

Lause

f -taajuisilla sini-, kosini- ja eksponenttifunktioilla on jakso $T = \frac{1}{f}$.

Todistus (vain s_f :lle)

$$s_f\left(x + \frac{1}{f}\right) = \sin\left(2\pi f\left(x + \frac{1}{f}\right)\right) = \sin(2\pi fx + 2\pi) = \sin(2\pi fx) = s_f(x)$$

Seuraus

Funktioilla $s_{\frac{n}{T}}(x)$, $c_{\frac{n}{T}}(x)$, ja $e_{\frac{n}{T}}(x)$ on jakso T .

Todistus (vain s :lle)

$$\begin{aligned} s_{\frac{n}{T}}(x + T) &= \sin\left(2\pi \frac{n}{T}(x + T)\right) \\ &= \sin\left(2\pi \frac{n}{T}x + 2\pi n\right) = \sin\left(2\pi \frac{n}{T}x\right) = s_{\frac{n}{T}}(x). \end{aligned}$$

Lause

T -jaksoiselle eksponenttifunktiolle pätee

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} e^{\frac{2\pi i n}{T} x} dx = \begin{cases} 0, & \text{jos } n \neq 0 \\ T, & \text{jos } n = 0 \end{cases}$$

Määritelmä

Fourier-sarjoille kahteen suuntaan ääretön sarja tarkoittaa (poikkeuksellisesti) seuraavaa:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M F_n.$$

Määritelmä

T -jaksoisen funktion Fourier-sarja on

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}.$$

Lukuja $F_n \in \mathbb{C}$ kutsutaan funktion f Fourier-kertoimiksi tai spektriiksi. Jos $F_n \neq 0$ tai $F_{-n} \neq 0$, sanotaan, että funktiossa f esiintyy taajuus $\frac{n}{T} = nf$. Kertoimia $F_{\pm n}$ sanotaan myös taajuuden $\frac{n}{T}$ amplitudeiksi.

Huomautus

Koska kaikki osafunktiot ovat T -jaksoisia, on myös summafunktio (mikäli suppenee) sellainen.

Kertoimien F_n selvittäminen

Jos

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x},$$

pitäisi olla

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-\frac{2\pi i n}{T} x} dx$$

Huomautus

Luku α on vapaasti valittavissa. Luvun α kiinnittäminen määrää "ikkunan" $[\alpha, \alpha + T]$, josta funktiota f tarkastellaan. Tyypillisiä valintoja ovat $\alpha = 0$ ja $\alpha = -\frac{T}{2}$.

Määritelmä

$$f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \text{ ja } f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$$

Lause

Olkoon f T -jaksoinen funktio, jolle toispuoleiset derivaatat ovat olemassa. Olkoon lisäksi

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-\frac{2\pi i n}{T} x} dx.$$

Tällöin sarja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$$

suppenee pisteessä x_0 kohti arvoa $\frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$.

Reaalinen muoto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + B_n \sin \frac{2\pi n}{T} x \right),$$

missä $A_n = F_n + F_{-n}$ ja $B_n = i(F_n - F_{-n})$.

Lause

Jos f on reaaliarvoinen, ovat A_n ja B_n reaalisia.