

Insinöörimatematiikka: Fourier-analyysi

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Kertoimien F_n selvittäminen

Jos

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x},$$

pitäisi olla

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-\frac{2\pi i n}{T} x} dx$$

Huomautus

Luku α on vapaasti valittavissa. Luvun α kiinnittäminen määrää "ikkunan" $[\alpha, \alpha + T]$, josta funktiota f tarkastellaan. Tyypillisiä valintoja ovat $\alpha = 0$ ja $\alpha = -\frac{T}{2}$.

Määritelmä

$$f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \text{ ja } f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$$

Lause

Olkoon f T -jaksoinen funktio, jolle toispuoleiset derivaatat ovat olemassa. Olkoon lisäksi

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-\frac{2\pi i n}{T} x} dx.$$

Tällöin sarja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$$

suppenee pisteessä x_0 kohti arvoa $\frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$.

Reaalinen muoto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + B_n \sin \frac{2\pi n}{T} x \right),$$

missä $A_n = F_n + F_{-n}$ ja $B_n = i(F_n - F_{-n})$.

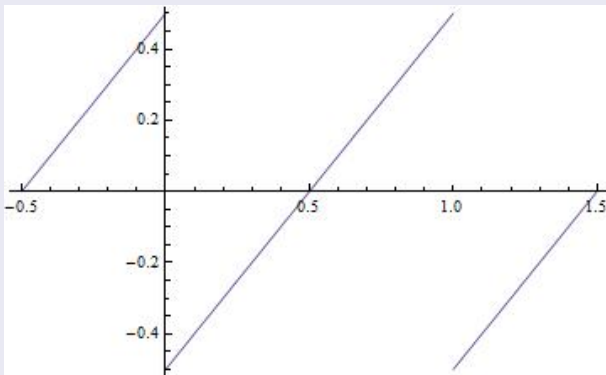
Lause

Jos f on reaaliarvoinen, ovat A_n ja B_n reaalisia.

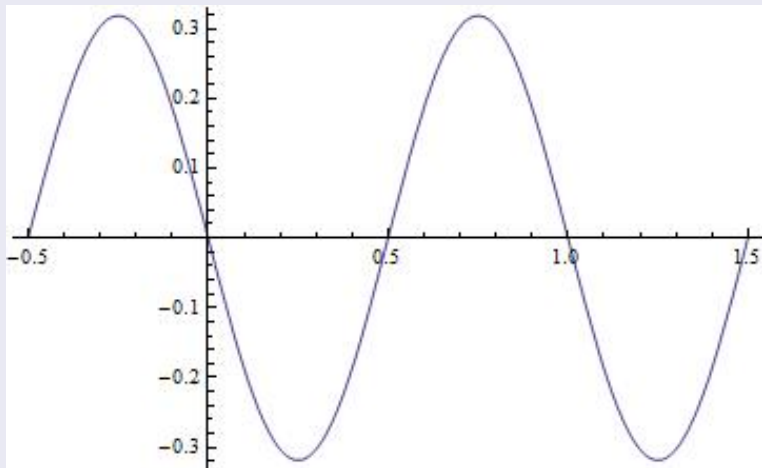
Esimerkkejä

Esimerkit 37–39

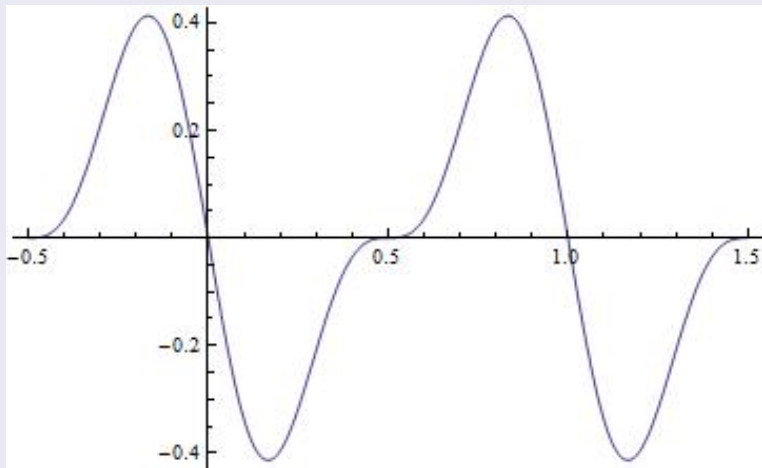
$$\sigma_0(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$$



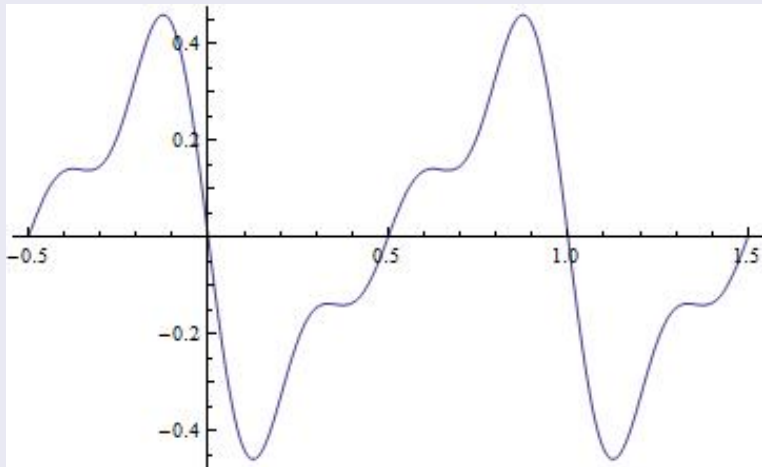
$$-\sum_{n=1}^1 \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



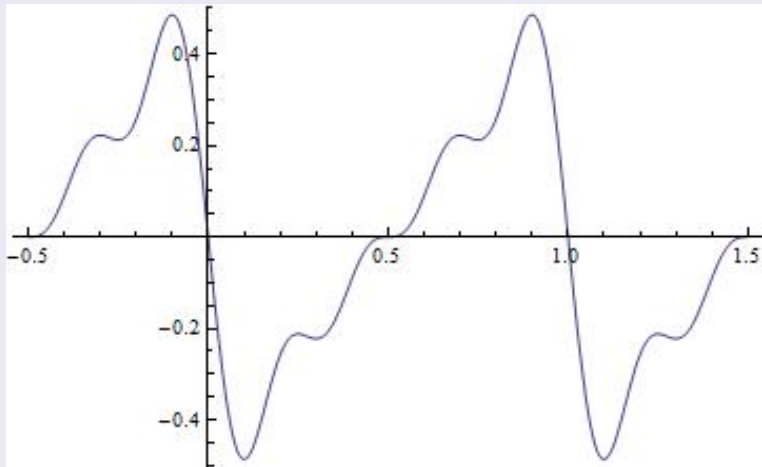
$$-\sum_{n=1}^2 \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



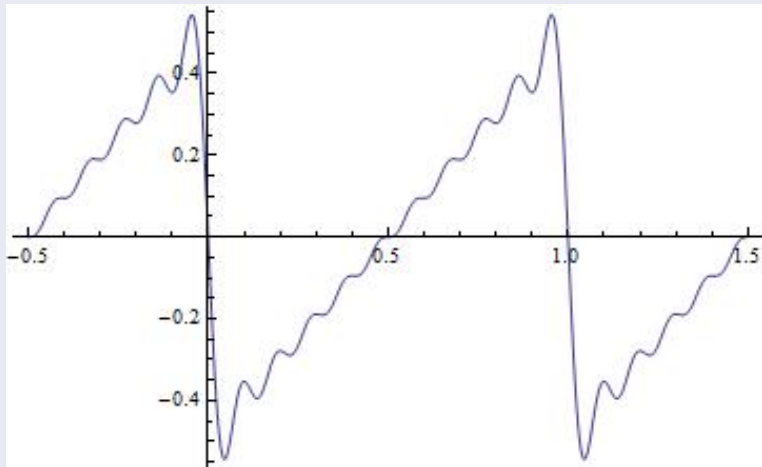
$$-\sum_{n=1}^3 \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



$$-\sum_{n=1}^4 \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$

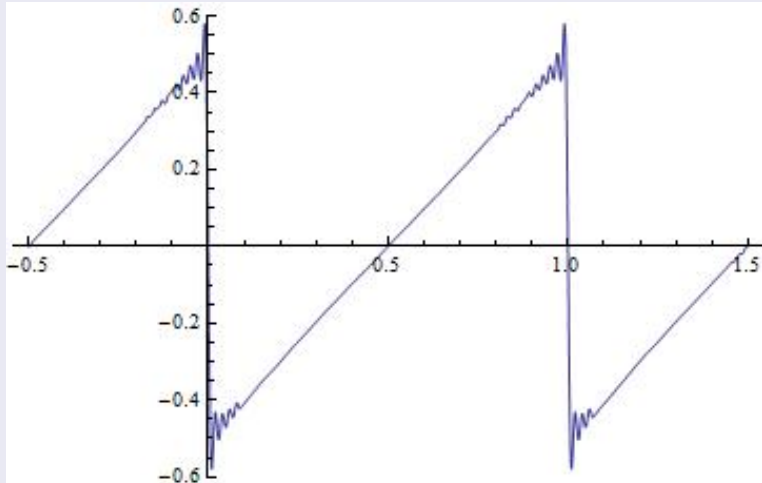


$$-\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



Fourier-sarjat

$$-\sum_{n=1}^{50} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



Esimerkki 40

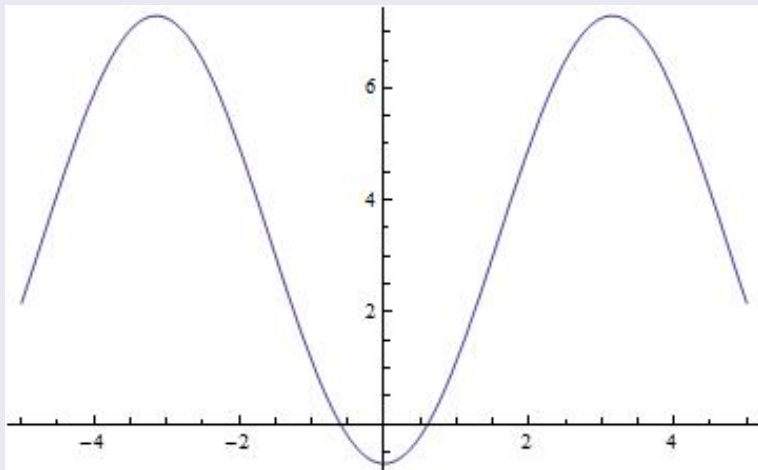
Välillä $[-\pi, \pi]$ on

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

Välillä $(0, 2\pi)$ on

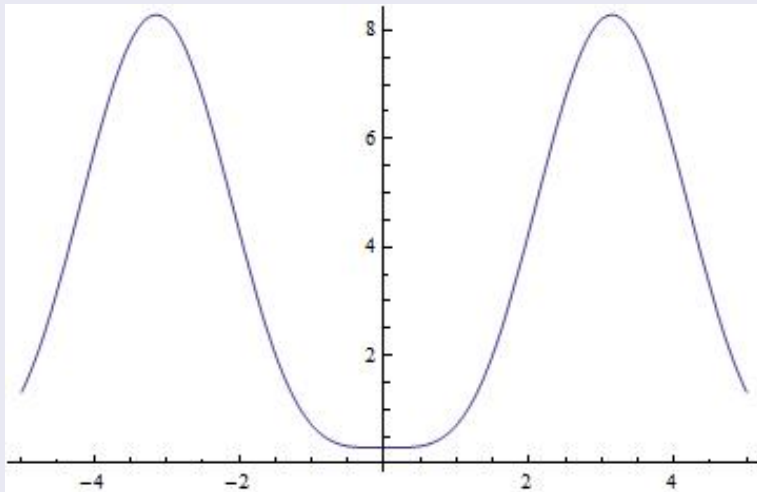
$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

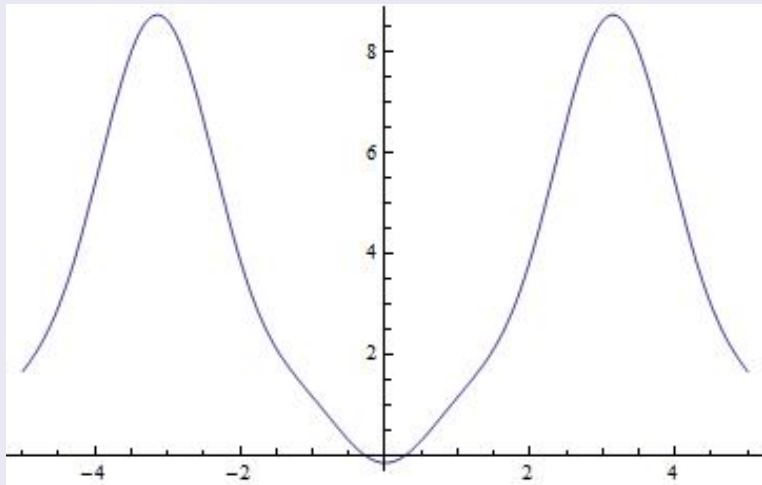


Esimerkki

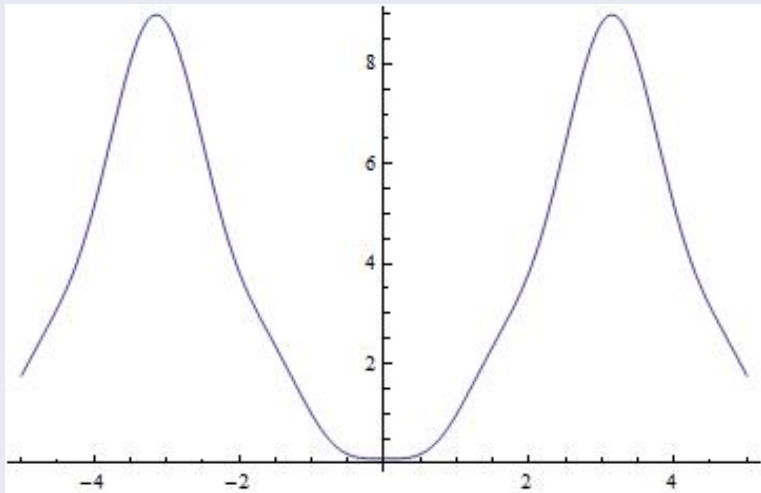
$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^2 \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



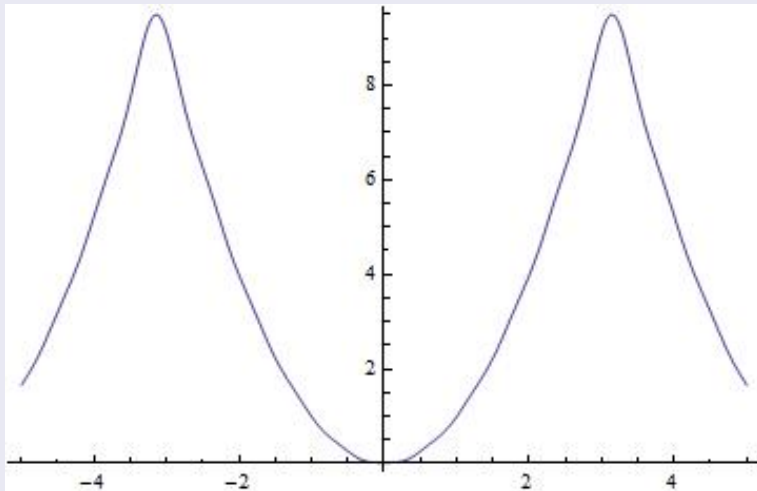
$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^3 \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



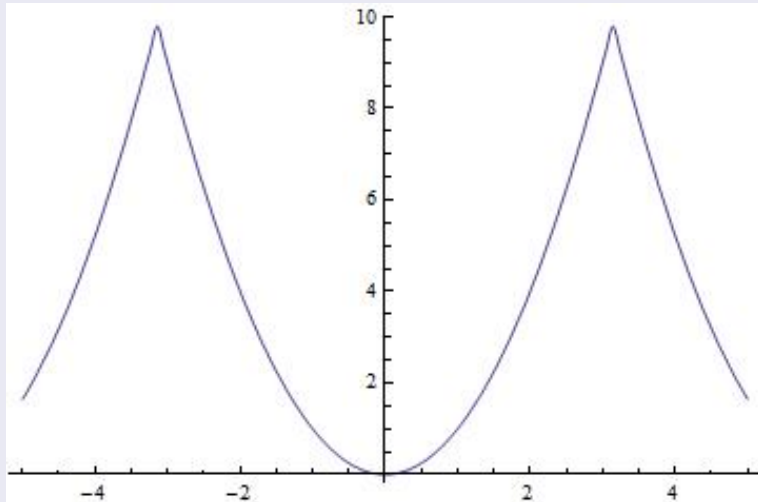
$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^4 \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{10} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

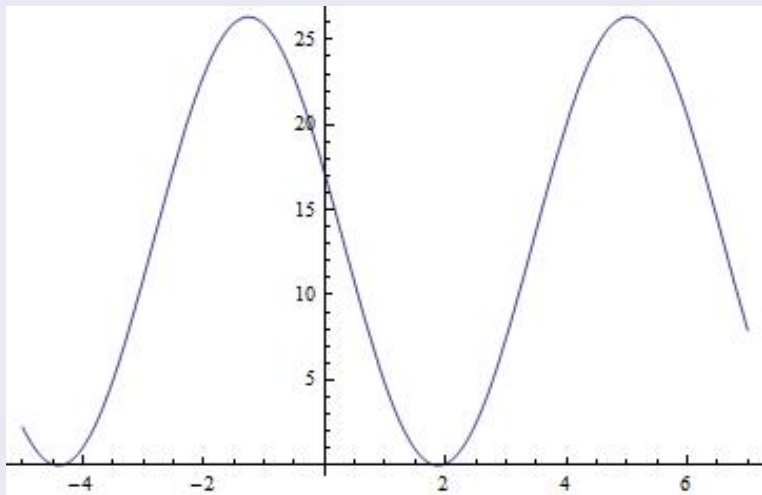


$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{50} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



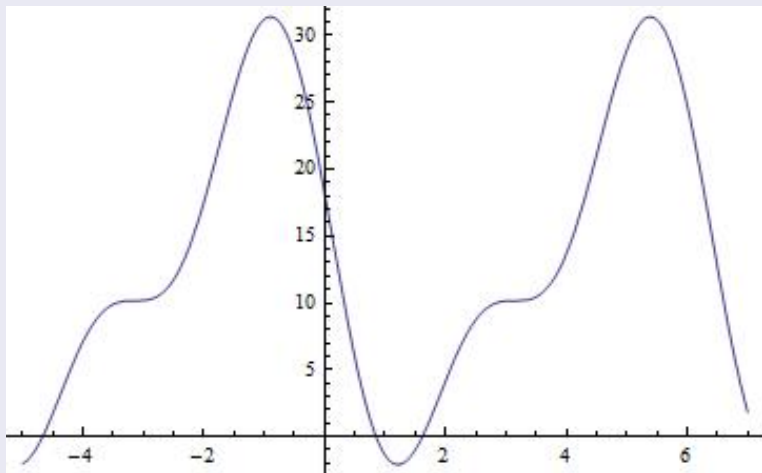
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^1 \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



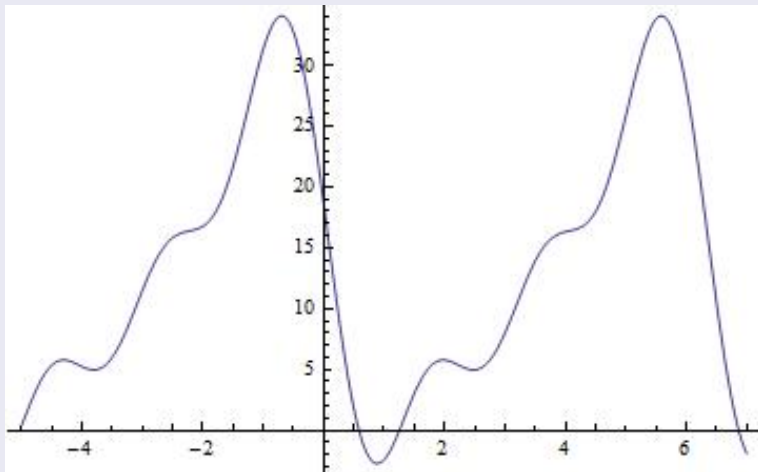
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^2 \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



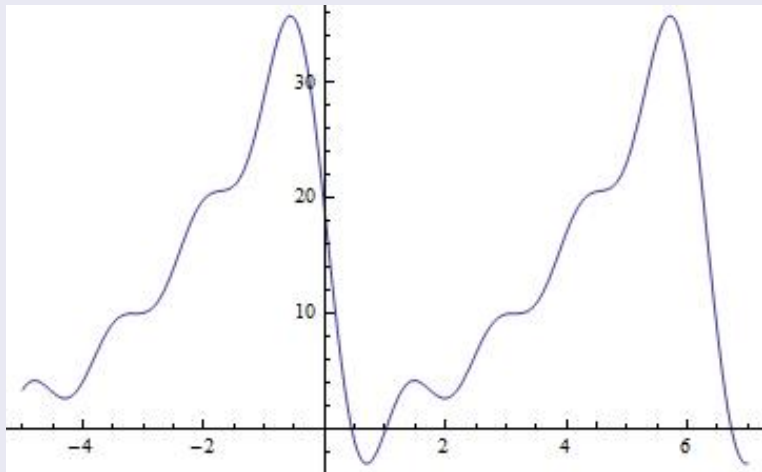
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^3 \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



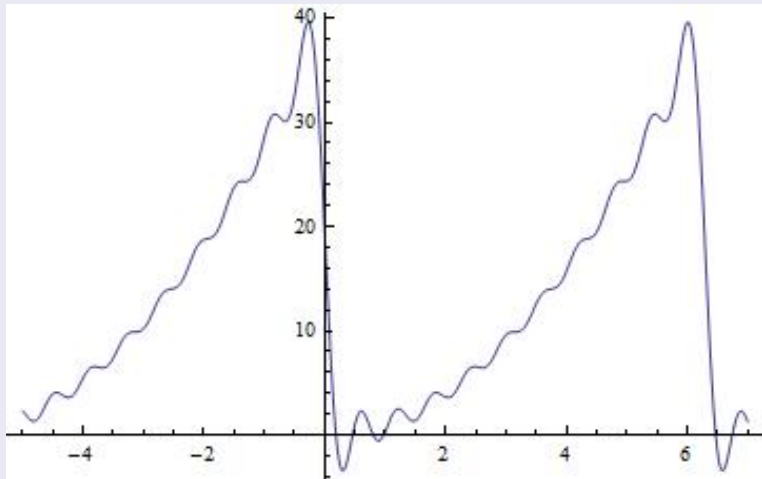
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^4 \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



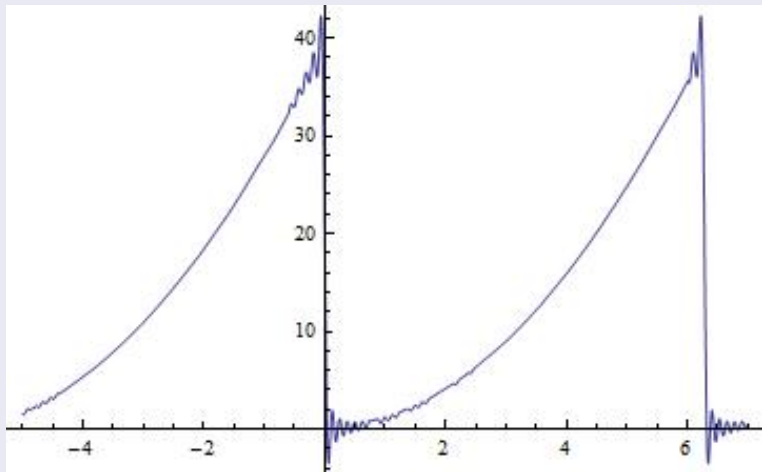
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{50} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



Lause

Olkoon f on T -jaksoinen funktio, jolla on Fourier-sarja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}.$$

Tällöin Fourier-sarja voidaan integroida termeittäin:

$$\int_0^x f(t) dt = F_0 x + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} F_n \frac{T}{2\pi i n} (e^{\frac{2\pi i n}{T} x} - 1)$$

Lause

Jos lisäksi funktion f' toispuoleiset derivaatat ovat olemassa, voidaan Fourier-sarja derivoida termeittäin:

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi in}{T} F_n e^{\frac{2\pi in}{T} x}$$

Termeittäin integrointi ja derivointi ovat voimassa myös reaaliselle muodolle.

Esimerkki 41

$$\sigma_0(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$

$$\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t) dt$$

Parsevalin kaava

Jos f :llä ja g :llä on Fourier'n sarjat

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$$

ja

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x},$$

on tällöin

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \overline{G_n}.$$

Parsevalin kaava

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \overline{G_n}.$$

Plancherelin kaava

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

Tulkintaa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + B_n \sin \frac{2\pi n}{T} x \right)$$

Funktion f Fourier-sarjassa esiintyy perustaajuus $f = \frac{1}{T}$ ja sen kaikki kokonaislukumonikerrat $\frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \dots$ (jos kertoimet $\neq 0$).
Taajuus $\frac{n}{T}$ esiintyy amplitudeilla $F_{\pm n}$ (vaihtoehtoisesti: amplitudeilla A_n ja B_n)

Yleistys

Taajuuksien $\frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \dots$ sijasta kaikki reaalityyppiset $f \in [0, \infty)$.

Määritelmä

Funktion $f(x)$ esitystä

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i y x} dy$$

sanotaan Fourier'n integraaliksi ja $F(y)$:tä funktion f spektriiksi.

Huomautus

Analogisisesti Fourier-sarjojen kanssa, määritellään Fourier-analyysissa kahteen suuntaan ääretön integraali (poikkeuksellisesti) Cauchyn pääarvona:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(x) dx$$