

Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Determinantin summaesitys

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{(i_1 i_2 \dots i_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_n) A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{ni_n} \\ &= \sum_{(i_1 i_2 \dots i_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_n) A_{i_1 1} A_{i_2 2} \dots A_{i_n n}\end{aligned}$$

Seuraus

$$\det(A) = \det(A^T)$$

$$A_{i1} C_{j1} + A_{i2} C_{j2} + \dots + A_{in} C_{jn} = \begin{cases} \det(A), & \text{jos } i = j \\ 0, & \text{jos } i \neq j \end{cases}$$

Rivikehitelmien matriisimuoto

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \\
 = & \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A)I
 \end{aligned}$$

Seuraus

Jos $\det(A) \neq 0$, on A^{-1} olemassa.

Toisaalta

Jos A^{-1} on olemassa, on
 $1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$, joten $\det(A) \neq 0$.

Homogeeninen yhtälöryhmä

$$Ax = \mathbf{0}$$

Jos $\det(A) \neq 0$, on A^{-1} olemassa ja siksi

$$A^{-1}Ax = A^{-1}\mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Homogeeninen yhtälöryhmä

Jos $\det(A) = 0$, on yhtälöllä $Ax = \mathbf{0}$ myös epätriviaaleja ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) ratkaisuja.

Määritelmä

Olkoon A neliömatriisi. $\lambda \in \mathbb{C}$ on matriisin A ominaisarvo, jos on olemassa sellainen $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, että

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Jokaista tämän yhtälön toteuttavaa vektoria $\mathbf{x}$ sanotaan ominaisarvoon λ kuuluvaksi ominaisvektoriksi.

Esimerkki

$$I\mathbf{x} = \mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x},$$

joten 1 on identiteettimatriisin ominaisarvo ja mikä hyvänsä $\mathbf{x}$ siihen liittyvä ominaisvektori.

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Yleistys

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = d_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diagonaalimatriisin ominaisarvot ovat siis diagonaalialkiot ja ominaisvektoreina toimivat luonnollisen kannan vektorit.

Geometrinen tulkinta

- Jokainen $n \times n$ -matriisi A määrittelee lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.
- Jokainen matriisin A ominaisvektori $\mathbf{x}$ vastaa sellaista suuntaa, jossa A toimii "venyttävänä" tai "kutistavana" kuvauksena: $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Ominaisarvojen määrittäminen

Vaatus: Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ oltava ratkaisu $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Ominaisarvoyhtälö

Ratkaisu $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ on olemassa tarkalleen silloin kun

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Huomautus

Jos A on $n \times n$ -matriisi, on $\det(A - \lambda I)$ astetta n oleva λ :n polynomi.

Esimerkki

Matriisin

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvot?

Esimerkki

Matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvot?

Ominaisvektorien määrittäminen

Jos ominaisarvo λ on tunnettu, voidaan siihen kuuluvat ominaisvektorit $\mathbf{x}$ määrittää yhtälöstä

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Gaussin-Jordanin menetelmällä.

Esimerkki

Aiempien esimerkkien matriisien ominaisvektorit?

Lause

Olkoon V $n \times n$ -matriisin A ominaisarvoon λ liittyvien ominaisvektoreiden joukko. Tällöin V on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Yhteenveto

Koska ominaisarvoyhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$ on astetta n oleva polynomiyhtälö, voi erisuuria ominaisarvoja olla korkeintaan n kappaletta.

Kutakin ominaisarvoa λ kohti ominaisvektorit määräytyvät yhtälöstä $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, joka voidaan kirjoittaa homogeenisena $n \times n$ -yhtälöryhmänä. Ominaisvektorit saadaan Gaussin-Jordanin menetelmällä ja ne muodostavat $\mathbb{R}^n$:n (tai $\mathbb{C}^n$:n) aliavaruuden.

Seuraus 1

Jos $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, on $A^i\mathbf{x} = \lambda^i\mathbf{x}$.

Seuraus 2

Olkoot $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ matriisin A ominaisarvoja ja $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ näihin kuuluvat ominaisvektorit.

Jos

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n,$$

on

$$A\mathbf{x} = a_1A\mathbf{x}_1 + \dots + a_nA\mathbf{x}_n = a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\lambda_n\mathbf{x}_n,$$

ja induktiolla

$$A^i\mathbf{x} = a_1\lambda_1^i\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\lambda_n^i\mathbf{x}_n.$$

Huomautus

Diagonaalimatriisien kertolasku on yksinkertaista:

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} c_1 d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n d_n \end{pmatrix}.$$

Tavoite:

Löytää matriisille A sellainen diagonaalinen "kumppani" D , että $A = PDP^{-1}$. Tällöin

$$A^n = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Määritelmä

Matriisit A ja B ovat *similaarit*, jos on olemassa sellainen säännöllinen matriisi P , että $A = PBP^{-1}$. Merkitään $A \sim B$

Lause

1) $A \sim A$. 2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$. 3) $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.