

Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Diagonaalimatriisin potenssit:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k^n \end{pmatrix},$$

Seuraus

Taylorin sarjan $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ määrittelemä funktio yleistetään diagonaalimatriiseille D seuraavasti: $f(D)_{ii} = f(D_{ii})$.

Huomautus

Jos matriisi A ei ole diagonaalinen, mutta on similaarinen diagonaalimatriisin kanssa ($A = PDP^{-1}$), määritellään $f(A) = Pf(D)P^{-1}$.

Ongelma

Entä jos matriisi A ei ole diagonalisoituva?

Määritelmä

Ominaisarvoon λ liittyvä *Jordan-lohko* on

$$J_{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Jordan-lohkojen potenssit:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

Jordan-lohkojen potenssit

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

ja niin edelleen.

Huomaus

$$\begin{aligned} n\lambda^{n-1} &= \frac{d}{d\lambda}\lambda^n, \quad \binom{n}{2}\lambda^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\lambda^2}\lambda^n, \\ \binom{n}{3}\lambda^{n-2} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\lambda^{n-2} = \frac{1}{6}\frac{d^3}{d\lambda^3}\lambda^n \end{aligned}$$

Määritelmä

$$f \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2}f''(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2}f''(\lambda) & \frac{1}{6}f'''(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2}f''(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Lause

Olkoon A $n \times n$ -matriisi, jonka ominaisarvot ovat $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (eivät välttämättä erisuuret). Tällöin on olemassa sellainen kääntyvä matriisi P , että $P^{-1}AP$ voidaan esittää lohkomuodossa

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & \\ & J_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_k} \end{pmatrix}.$$

Matriisi P voidaan valita siten, että sen sarakkeet ovat matriisin A ominaisvektoreita tai *yleistettyjä* ominaisvektoreita.

Yleistetyt ominaisvektorit

Ominaisarvoon λ kuuluva matriisin A ominaisvektori toteuttaa yhtälön

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Ominaisarvoon λ kuuluva matriisin A kertaluvun k yleistetty ominaisvektori toteuttaa yhtälön

$$(A - \lambda I)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Yleistetyt ominaisvektorit

Jos $(A - \lambda I)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$, on myös $(A - \lambda I)^{k+1} \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Määritelmä

Olko E_λ^k vektoriavaruus, joka koostuu matriisin A ominaisarvoon λ kuuluvista, kertaluvun k ominaisvektoreista.

Huomautus

Edellämainitun perusteella $E_\lambda^k \subseteq E_\lambda^{k+1}$.

Määritelmä

Ominaisarvoon λ kuuluvat yleistetyt ominaisvektorit $\mathbf{x}_k$ muodostavat *Jordanin ketjun*, jos $\mathbf{x}_{k-1} = (A - \lambda I)\mathbf{x}_k$.

Fakta

Jordanin normaalimuodon välittävän matriisin sarakkeet voidaan valita yleistettyjen ominaisvektoreiden joukosta siten että ne muodostavat Jordanin ketjun oikealta vasemmalle.

Esimerkki

Matriisin $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ainoa ominaisarvo on 2 ja tähän liittyvä ominaisvektorien avaruus $(1, 1)^T$.

Jordanin normaalimuotoa varten etsitään toisen kertaluvun ominaisvektoreita, jotka ovat yhtälön

$$(A - \lambda I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

ratkaisuja. Koska tässä tapauksessa $(A - \lambda I)^2 = 0$, kelpaa mikä tahansa vektori, esim. $(1, 0)^T$ ylläolevan yhtälön ratkaisuksi.

Jordanin ketju voidaan muodostaa valitsemalla

$$\mathbf{x}_2 = (A - \lambda I)(1, 0)^T = (1, 1)^T.$$

Esimerkki

Näin ollen matriisi $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on Jordanin normaalimuodon välittävä matriisi:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Avaruus E_1^1

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -17 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Avaruus E_1^1 :

$$(A - 1 \cdot I)\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 10 & -17 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2y, y, 0) = y(2, 1, 0)$$

Avaruudet E_1^2 ja E_1^3

Avaruus E_1^2 :

$$(A - 1 \cdot I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2y - 3z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$$

Avaruus E_1^3 : $(A - 1 \cdot I)^3 \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Nyt $(A - 1 \cdot I)^3 = 0$, joten $E_1^3 = \mathbb{C}^3$

Ominaisvektoreiden valinta

$E^1 = \langle (2, 1, 0) \rangle$, $E^2 = \langle (2, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle$, $E^3 = \mathbb{C}^3$, dimensiot 1, 2 ja 3.

- Ensin valitaan $3 - 2 = 1$ vektoria avaruudesta $E^3 \setminus E^2$, esim. $(1, 0, 0)^T$
- Sitten valitaan $2 - 1 = 1$ vektoria avaruudesta $E^2 \setminus E^1$, joukkoon pitää valita $(A - I)(1, 0, 0)^T = (-5, -1, 1)^T$.
- Sitten valitaan 1 vektori avaruudesta E^1 , joukkoon pitää valita $(A - I)(-5, -1, 1)^T = (-2, -1, 0)^T$.

Matriisin P muodostaminen

- P :n sarakkeiksi valitaan ominaisvektorit aloittaen alimmasta kertaluvusta
- Sarake $\mathbf{x}_k$ sijoitetaan välittömästi sarakkeen $\mathbf{x}_{k+1}$ vasemmalle puolelle, jos $(A - \lambda I)\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jolloin

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esimerkki

Jos

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

on

$$\begin{aligned} e^J &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda & \frac{1}{2}e^\lambda \\ 0 & e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & 0 & e^\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kosinilause

$$||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 - 2||\mathbf{x}|| ||\mathbf{y}|| \cos \theta$$

Pistetulo: Geometrinen määritelmä

Vertaa: Kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Määritellään

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = ||\mathbf{x}|| ||\mathbf{y}|| \cos \theta,$$

jolloin

$$||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \cos 0 = \|\mathbf{x}\|^2$
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\alpha \mathbf{y})$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$

Seuraus

Koska $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ ja $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, on vektoreille $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$ ja $\mathbf{y} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= (x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \cdot (y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}) \\ &= x_1\mathbf{i} \cdot y_1\mathbf{i} + x_1\mathbf{i} \cdot y_2\mathbf{j} + x_2\mathbf{j} \cdot y_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} \cdot y_2\mathbf{j} \\ &= x_1y_1 + x_2y_2\end{aligned}$$

Huomautus

Jos $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat rivivektoreita, on matriisitulo

$$\mathbf{x}\mathbf{y}^T = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Jos $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ (riviesitys) ja $B = (\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n)$ (sarake-esitys)
ovat $n \times n$ -matriiseja, on

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$$

Vektoriavaruuksien geometriaa

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ja $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (vaihdannaisuus eli kommutatiivisuus).
- $(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (lineaarisuus).

Esimerkki

Vektoreiden $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* määritellään $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Tämä toteuttaa sisätulon ehdot. Niin myös välillä $[a, b]$ jatkuvien reaalifunktioiden joukossa $C^0[a, b]$ määritely

$$(f, g) = \int_a^b fg.$$

Huomautus

Sisätuloja on useita: Jos $p_1, \dots, p_n > 0$, on

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p_1 x_1 y_1 + \dots + p_n x_n y_n$$

on sisätulo.

Määritelmä

$n \times n$ matriisi A on *positiividefiniitti* jos $\mathbf{x} A \mathbf{x}^T > 0$ kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Jos matriisi A on symmetrinen ($A = A^T$) ja positiividefiniitti, on

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} A \mathbf{y}^T$$

sisätulo.

Huomautus

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineaarikuvaus. Koska lineaarikuvauksella on myös aina matriisiesitys, voidaan todeta että

$$f(\mathbf{x}) = A_f \mathbf{x}$$

jollekin matriisille $1 \times n$ -matriisille A_f (rivivektorille), kun $\mathbf{x}$ esitetään $n \times 1$ -matriisina (sarakevektorina).

Merkitään $A_f = \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ja $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, jolloin

$$f(\mathbf{x}) = A_f \mathbf{x} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^T.$$

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö

Jokainen sisätulo toteuttaa epäyhtälön

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})$$

Esimerkki

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n|^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

Esimerkki

$$\left| \int_a^b fg \right|^2 \leq \int_a^b f^2 \cdot \int_a^b g^2$$

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Vektoriavaruuden *normi* on kuvaus $V \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ja $\|\mathbf{x}\| = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (positiivisuus ja epädegeneratiivisuus)
- $\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|$ (skalaarin siirto)
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (kolmioepäyhtälö)

Huomautus

Sisätulo indusoi aina normin:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})},$$

mutta normeja on aina useita.