

Insinöörimatematiikka: Lineaarialgebra

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Sisätulo

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ja $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (vaihdannaisuus eli kommutatiivisuus).
- $(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (lineaarisuus).

Esimerkki

Vektoreiden $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* määritellään $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Tämä toteuttaa sisätulon ehdot. Niin myös välillä $[a, b]$ jatkuvien reaalifunktioiden joukossa $C^0[a, b]$ määritely

$$(f, g) = \int_a^b fg.$$

Huomautus

Sisätuloja on useita: Jos $p_1, \dots, p_n > 0$, on

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p_1 x_1 y_1 + \dots + p_n x_n y_n$$

on sisätulo.

Määritelmä

$n \times n$ matriisi A on *positiividefiniitti* jos $\mathbf{x} A \mathbf{x}^T > 0$ kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Jos matriisi A on symmetrinen ($A = A^T$) ja positiividefiniitti, on

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} A \mathbf{y}^T$$

sisätulo.

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö

Jokainen sisätulo toteuttaa epäyhtälön

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})$$

Esimerkki

$$|x_1y_1 + \dots + x_ny_n|^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

Esimerkki

$$\left| \int_a^b fg \right|^2 \leq \int_a^b f^2 \cdot \int_a^b g^2$$

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Vektoriavaruuden *normi* on kuvaus $V \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ja $\|\mathbf{x}\| = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (positiivisuus ja epädegeneratiivisuus)
- $\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|$ (skalaarin siirto)
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (kolmioepäyhtälö)

Huomautus

Sisätulo indusoi aina normin:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})},$$

mutta normeja on aina useita.

Esimerkkejä

Pistetulon indusoima kuvaus

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

on normi.

Myös

$$||\mathbf{x}|| = |x_1| + \dots + |x_n|$$

on normi.

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. *Etäisyys* on funktio $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ja $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{y}$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (symmetria).
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (kolmioepäyhtälö).

Huomautus

Jokainen normi määrittelee etäisyysfunktion

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Määritelmä

Jos V on vektoriavaruus, jossa etäisyysfunktion $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ määrittelee sisätulon indusoima normi, siis

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Tällöin sanotaan että avaruus on *Euklidinen*.

Huomautus

Ylläolevan määritelmän mukaan Euklidisuus ei ole vektoriavaruuden algebrallinen vaan geometrinen ominaisuus. Vektoriavaruudelle on mahdollista määritellä sekä Euklidisia että epäeuklidisia geometrioita.

Määritelmä

Olkoon V kompleksinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, on *Hermiten sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ja $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (epänegativisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ (vinosymmetria).
- $(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (lineaarisuus 1. argumentin suhteen).

Määritelmä

Vektoreiden $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ *Hermiten pistetulo* määritellään $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}$.

Määritelmä

Olkoon $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jokin sisätulo. Vektorit $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat *ortogonaalit* eli *kohtisuorat* jos $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Määritelmä

Vektorijoukko $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ on *ortogonaali*, jos $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$ aina kun $i \neq j$. Ortogonaali joukko $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ on *ortonormaali*, jos lisäksi $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = 1$.

Huomautus

- Jokaisesta ortogonaalista joukosta joka ei sisällä nollavektoria voidaan helposti saada ortonormaali kertomalla kukin $\mathbf{x}_i$ norminsa käänteisluvulla $\|\mathbf{x}_i\|^{-1}$.
- $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ on ortonormaali kun sisätuloksi valitaan tavallinen pistetulo.

Lause

Olkoon V vektoriavaruus ja $A = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ joukko, joka ei sisällä nollavektoria ja on ortogonaali jonkin sisätulon $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ suhteen. Tällöin A on lineaarisesti riippumaton.

Koordinaattivektorin etsiminen

Jos $B_1 = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on jokin kanta, on jokaiselle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ olemassa kantaesitys:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n,$$

Koordinaattivektori $\mathbf{x}_B = (x_1, \dots, x_n)$ voidaan löytää Gaussin-Jordanin prosessilla (Yleensä työläs prosessi)

Koordinaattivektorin etsiminen, Ortonormaali kanta

Jos $B_1 = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on ortonormaali kanta, voidaan kantaesitys

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n,$$

löytää helpommin. Koordinaattivektori $(x_1, \dots, x_n)$ voidaan löytää laskemalla sisätulo $(\mathbf{x}, \mathbf{b}_i)$, jolloin

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{b}_i) &= x_1(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_i) + \dots + x_i(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i) + \dots + x_n(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_i) \\ &= x_i(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i) = x_i \|\mathbf{b}_i\|^2,\end{aligned}$$

siis

$$x_i = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{b}_i)}{\|\mathbf{b}_i\|^2}$$

Määritelmä

Olkoot $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Tällöin *vektorin $\mathbf{x}$ projektio vektorilla $\mathbf{y}$* tarkoittaa sitä origon ja pisteen $\mathbf{y}$ kautta kulkevan suoran $L(\mathbf{y})$ pistettä $\mathbf{x}'$, jolle $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ on kohtisuorassa vektoria $\mathbf{y}$ vastaan.

Määritelmä

Lineaarikuvaus $f : V \rightarrow V$ säilyttää etäisyyden, jos $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ aina, kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Kuvaus f säilyttää normin, jos $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$. Kuvaus f säilyttää sisätulon, jos $(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Lause

Olcoon etäisyys normin ja tämä puolestaan sisätulon indusoima. Jos lineaarikuvaus $f : V \rightarrow V$ säilyttää sisätulon, säilyttää se myös normin ja etäisyyden.

Etäisyyden säilyttävät kuvaukset

Määritelmä

Matriisi A on ortogonaali, jos $A^T = A^{-1}$, siis $A^T A = A A^T = I$.

Lause

Jos lineaarikuvauksen $f : V \rightarrow V$ matriisi A_f on ortogonaali, niin kuvaus f säilyttää pistetulon (ja siis myös tämän indusoiman normin ja etäisyyden)

Määritelmä

Matriisin A *adjugaatti* määritellään $A^* = \overline{A}^T$. Matriisi A on *unitaarinen*, jos $A^* = A^{-1}$, siis $A^* A = A A^* = I$.

Lause

Jos lineaarikuvauksen $f : V \rightarrow V$ matriisi A_f on unitaarinen, niin f säilyttää Hermiten pistetulon (ja siis myös sen indusoiman normin ja etäisyyden)

Vektoriavaruuksien geometriaa

Kulma avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Vektoreiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ välinen *kulma* tarkoittaa kulmaa $\theta \in [0, \pi]$, joka muodostuu origosta (pisteestä $\mathbf{0}$) pisteeseen $\mathbf{x}$ ja origosta pisteeseen $\mathbf{y}$ kulkevien janojen välille.

Huomaa, että kolme pistettä $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ja $\mathbf{0}$ kuuluvat aina samalle tasolle, joten vektoreiden välinen kulma on aina *tason* ominaisuus.

Määritelmä

Jos θ on vektoreiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ välinen kulma, niin

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \theta.$$

Huomautus

Jos kumpikaan $\mathbf{x}$ tai $\mathbf{y}$ ei ole nollavektori, on

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Yleistys

Nollasta poikkeavien vektoreiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ välinen kulma θ määritellään

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

Nollavektorin välinen kulma toiseen vektoriin määritellään aina suoraksi kulmaksi.

Huomautus

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön perusteella

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2,$$

joten

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

Ongelmanasettelu

- Kaksi satunnaismuuttujaa X ja Y .
- Näiden havainnot $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ tapauksissa $1, 2, \dots, n$.
- Selvitettävä, kuinka yleisesti $y_i \approx c \cdot x_i + b$.

Muuttujien siirto

- Merkitään $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$
- $\mu_{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ja $\mu_{\mathbf{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$
- Määritellään $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}} \mathbf{1}$ ja $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \mu_{\mathbf{y}} \mathbf{1}$.
- Tällöin $\mathbf{x} = c\mathbf{y} + b\mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{x}' = c\mathbf{y}'$.
- Lisäksi vektoreiden $\mathbf{x}'$ ja $\mathbf{y}'$ koordinaattien summa on 0

Riippuvuus

- Yhdensuuntaisuus $\mathbf{x}' = c\mathbf{y}'$ merkitsee täydellistä (lineaarista) riippuvuutta.
- Vektoreiden $\mathbf{x}'$ ja $\mathbf{y}'$ kohtisuoruus merkitsee täydellistä (lineaarista) riippumattomuutta.
- Riippuvuuden määrää on siksi luonteva mitata vektoreiden $\mathbf{x}'$ ja $\mathbf{y}'$ välisellä kulmalla (tai sen kosinilla)
-

$$\text{Corr}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}'}{||\mathbf{x}'|| ||\mathbf{y}'||}$$