

# Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot 2022

## Demonstraatio 1, 6.9.2022

1. Latinalaiset aakkoset on kehitetty kreikkalaisen aakkoston pohjalta ja niinpä translitterointi  $\alpha \mapsto a, \beta \mapsto b, \gamma \mapsto g, \dots$  on usein suoraviivaista. Tosin kreikkalaisen aakkoston kirjaimet  $\xi, \theta, \chi$  ja  $\psi$  translitteroidaan suomen kieleen yleensä konsonanttipareina ks, th, kh ja ps.

Kirjoita latinalaisin aakkosin  $\mu\pi\alpha\kappa\alpha\lambda\iota\alpha\rho\sigma \sigma\kappa\omicron\rho\delta\alpha\lambda\iota\alpha$ .

2. Kirjoita latinalaisin aakkosin  $\nu\psi\omicron\nu\alpha\nu\omicron\mu\eta\mu\alpha\tau\alpha \mu\eta \mu\omicron\nu\alpha\nu \omicron\psi\nu$ .

Mallivastaus: mpakaliaros skordalia ja nipson anomemata me monan opsin.

*Huomautus:* Ensimmäinen sanapari voi löytyä kreikkalaisen ravintolan ruokalistalta, sen merkitys on turskaa valkosipulikastikkeessa. Konsonanttijyhdistelmä mp ääntyy nykykreikassa kuten b, kun taas  $\beta$  on vuosituhansien aikana muuntunut äännemuotoon v. Vastaava ilmiö on nähdävissä muidenkin välimeren maiden ääntämyksessä vrt. *caballero*.

Toinen lause voidaan kääntää suomeksi ”Pese syntini, älä vain kasvojeni”. Lause löytyy usein kastemaljan ulkoreunaan kaiverrettuna ja voidaan lukea pyörittämällä maljaa joko oikealta vasemmalle tai päinvastoin, sillä lause on kreikkalaisin aakkosin kirjoitettuna palindromi.

3. Esitä sanallinen ilmaisu logiikan väittämälle

$$(\forall x)(\exists y)(x = y + 1).$$

Onko tilanteita joissa väittämä on tosi? Entä sellaisia joissa väittämä on epätosi?

Mallivastaus: Väittämä sanoo, että jokaista  $x$ :ää kohti on olemassa sellainen  $y$ , että  $x = y + 1$ . Väittämä on tosi esimerkiksi kokonaislukujen joukossa  $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ , jos  $+$  ja  $1$  tulkitaan tavalliseen tapaan. Väittämästä sen sijaan tulee epätosi, mikäli joukoksi vaihdetaan  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , sillä lukua  $1$  ei voida esittää muodossa  $y + 1$ , missä  $y \in \mathbb{N}$ .

4. Esitä sanallinen ilmaisu logiikan väittämälle

$$(\forall y)(\exists x)(x = y + 1).$$

Onko tilanteita joissa väittämä on tosi? Entä sellaisia joissa väittämä on epätosi?

Mallivastaus: Jokaista  $y$ :tä kohti on olemassa sellainen  $x$ , että  $x = y + 1$ . Väittämä on tosi edellisen mallivastauksen kummassakin tilanteessa.

Epätoden tulkinnan löytäminen ei ole kuitenkaan suoraviivaista. Jos nimittäin valitaan mikä hyvänsä joukko  $A$  ja sieltä alkio joksi symboli  $1$  tulkitaan, on väittämä välttämättä tosi mikäli  $+$  tulkitaan koko joukossa määritellyksi (binääriseksi) funktioksi. Epätodeksi väittämä tulee vain, jos sallitaan että  $+$  on vain osittain määritelty funktio, esim.  $A = \{1, 2\}$  ja jätetään esim.  $2 + 1$  määrittelemättä.

5. Onko  $(x^2 = 4) = (x = \pm 2)$  syntaksin kannalta oikein kirjoitettu? Jäsentele kirjoitelman eri osat niin tarkoin kuin pystyt: Mitkä ovat termien osia, minkä nimisiä, mitkä ovat kaavoja, jne?

Mallivastaus: Kaava on väärin kirjoitettu, koska kaksi atomikaavaa on yhdistetty yhtäsuuruusmerkillä. Yhtäsuuruusmerkillä voi yhdistää vain termejä. Osa-kaavassa  $x^2 = 4$   $x$  on muuttujasymboli, 4 vakiosymboli, ja  $^2$  on yksipaikkainen funktiosymboli. Täten  $x^2$  on termi, ja  $x^2 = 4$  on atomikaava, erityiseltä nimeltä yhtälö.

Toisessa atomikaavassa  $x = \pm 2$   $x$  on muuttujasymboli, 2 on vakiosymboli, ja  $\pm$  voidaan periaatteessa katsoa yksipaikkaiseksi funktiosymboliksi, mutta tavanomaista tulkintaa ei tämän näkemyksen perusteella saavuteta. Tosiasiassa  $x = \pm 2$  on lyhennysmerkintä kaavasta  $(x = 2) \vee (x = -2)$ ,

6. Onko  $x^2 = 4 \leftrightarrow x = 2$  syntaksin kannalta oikein kirjoitettu? Jäsentele kirjoitelman eri osat niin tarkoin kuin pystyt: Mitkä ovat termien osia, minkä nimisiä, mitkä ovat kaavoja, jne?

Mallivastaus: Kaava on syntaksin kannalta oikein kirjoitettu, jos ei kiinnitetä huomiota siihen, että sulkumerkit puuttuvat osakaavojen ympäriltä. Täydellinen muoto siis olisi  $(x^2 = 4) \leftrightarrow (x = 2)$ . Tavallisen tulkinnan mukaisesti kaava ei kuitenkaan ole semanttisesti tosi. Jäsentelyt samoin kuin edellisessä tehtävässä, mutta sen lisäksi koko kaava muodostaa konnektiivin  $\leftrightarrow$  yhdistämän kaavan.

7. Esitä joukko  $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 16 \vee x^2 = 5 \vee 3x = 6\}$  luettelemalla sen alkiot.

Mallivastaus:  $\{4, 2\} = \{2, 4\}$ .

8. Esitä joukko  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9 \vee 3x = 8\}$  luettelemalla sen alkiot.

Mallivastaus:  $\{-3, 3\}$ .

9. Kirjoita summa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{524288}$$

$\Sigma$ -merkintää käyttäen.

Mallivastaus:

$$\sum_{i=0}^{19} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{2^{i-1}}$$

10. Kirjoita summa

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99$$

$\Sigma$ -merkintää käyttäen.

Mallivastaus:

$$\sum_{i=0}^{49} (2i + 1) = \sum_{i=1}^{50} (2i - 1)$$

11. Kirjoita tulo

$$1^3 \cdot 2^{-3} \cdot 3^3 \cdot 4^{-3} \cdot 5^3 \cdot 6^{-3} \cdot \dots \cdot 20^{-3}$$

$\Pi$ -merkintää käyttäen.

Mallivastaus:

$$\prod_{i=1}^{20} i^{(-1)^{i+1}3}$$