

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot 2022

Demonstraatio 2, 13.9.2022

1. Onko totta, että $A \setminus B \subseteq A$? Perustele käyttämällä määritelmiä.

Mallivastaus: Väite on tosi, olivatpa A tai B mitä hyvänsä joukkoja. Oletetaan, että $x \in A \setminus B$. Tällöin $x \in A$ mutta $x \notin B$, joka tapauksessa $x \in A$. Näin ollen $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A$ on tosi, joten määritelmän mukaan $A \setminus B \subseteq A$.

2. Hyllyssä on 15 erilaista kirjaa. Jaakko valitsee niistä 6 luettavaksi tietystä järjestyksessä. Kuinka monta eri mahdollisuutta Jaakolla on?

Mallivastaus: Mahdollisuuksien määrä on $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 3603600$.

3. Myös Tiina valitsee 15 kirjan joukosta 6 luettavaksi, mutta ei välitä järjestyksestä. Kuinka monella eri tavalla Tiina voi kirjansa valita?

Mallivastaus: Mahdollisuuksien määrä on

$$\binom{15}{6} = \frac{15!}{6! \cdot 9!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 5005.$$

4. Millainen on $(x - 3y)^6$ auki kerrottuna?

Mallivastaus:

$$\begin{aligned}(x - 3y)^6 &= \binom{6}{0}x^6(-3y)^0 + \binom{6}{1}x^5(-3y)^1 + \binom{6}{2}x^4(-3y)^2 + \binom{6}{3}x^3(-3y)^3 \\ &\quad + \binom{6}{4}x^2(-3y)^4 + \binom{6}{5}x^1(-3y)^5 + \binom{6}{6}x^0(-3y)^6 \\ &= x^6 + 6x^5(-3y) + 15x^4 \cdot 9y^2 + 20x^3(-27y^3) \\ &\quad + 15x^2 \cdot 81y^4 + 6x^1(-243y^5) + 729y^6 \\ &= x^6 - 18x^5y + 135x^4y^2 - 540x^3y^3 + 1215x^2y^4 - 1458xy^5 + 729y^6.\end{aligned}$$

5. Mikä on termin x^{32} kerroin kun

$$\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{20}$$

kerrotaan auki? Ohje: Käytä binomikaavaa.

Mallivastaus:

$$\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} (x^3)^{20-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} (-2)^k x^{60-4k}$$

Kerroin selviää, kun selvitetään millä k :n arvolla $60 - 4k = 32 \Leftrightarrow k = 7$. Tällä arvolla saadaan kertoimeksi $\binom{20}{7}(-2)^7 = -9922560$.

6. Oletetaan, että $x > 1$. Selitä miksi tällöin $x^2 > x$, $x^3 > x^2$, $x^4 > x^3$, jne.

Mallivastaus: Positiivisten lukujen tulo pienenee kun tulon tekijöitä pienennetään. Näin ollen, kun $x > 1$, on $x^2 = x \cdot x > x \cdot 1 = x$, $x^3 = x^2 \cdot x > x^2 \cdot 1 = x^2$, $x^4 = x^3 \cdot x > x^3 \cdot 1 = x^3$, jne.

7. Tiedetään, että $d(a, c) < 0,01$ ja $d(b, d) < 0,03$. Esitä jokin arvio etäisyydelle $d(a + b, c + d)$. Ohje: Luentoruudut 4/11.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} d(a + b, c + d) &= |a + b - (c + d)| = |a - c + b - d| \\ &\leq |a - c| + |b - d| = d(a, c) + d(b, d) < 0,01 + 0,03 = 0,04. \end{aligned}$$

Huomautus: Tehtävän arvio havainnollistaa sitä tosiseikkaa, että summa $a + b$ ei muutu kovin paljon jos summattavia a ja b muutetaan vähän.

8. Tiedetään, että $|a| \leq 10$ ja $|d| \leq 20$ ja että $d(a, c) \leq 0,01$ ja $d(b, d) \leq 0,03$. Esitä jokin arvio etäisyydelle $d(ab, cd)$. Ohje: Luentoruudut 4/11.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} d(ab, cd) &= |ab - cd| = |ab - ad + ad - cd| \leq |ab - ad| + |ad - cd| \\ &= |a| |b - d| + |d| |a - c| = |a| d(b, d) + |d| d(a, c) \\ &\leq 10 \cdot 0,03 + 20 \cdot 0,01 = 0,5 \end{aligned}$$

Huomautus: Tehtävän arvio havainnollistaa sitä tosiseikkaa, että tulo ab ei muutu kovin paljon jos tulon tekijöitä a ja b muutetaan vähän. Erityisesti on huomattava, että tehtävän ehdoilla tulo voisi olla suuruudeltaan $10 \cdot 20 = 200$, ja tähän suhteutettuna $0,5$ on varsin pieni.

9. Olkoot $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 3x + 1$. Etsi lauseke funktioille $(f \circ g)(x)$ ja $(g \circ f)(x)$
Mallivastaus: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$ ja $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 3x^2 + 1$.

10. Etsi sellaiset joukot A ja B , että

$$f : A \rightarrow B, f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

on bijektio. Minkälainen lauseke tällöin saadaan käänteisfunktioille f^{-1} ?

Mallivastaus: Koska $\frac{1}{1+x^2} > 0$ ja $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ kaikilla reaaliarvoilla x , voidaan surjektiivisuutta varten ajatella valittavan $B = (0, 1]$. Injektiivisyyttä varten voidaan valita $A = [0, \infty)$.

Käänteisfunktion lauseke saadaan ratkaisemalla x yhtälöstä

$$y = \frac{1}{1 + x^2} \Leftrightarrow y + yx^2 = 1 \Leftrightarrow yx^2 = 1 - y \Leftrightarrow x^2 = \frac{1 - y}{y}.$$

Valinnan $A = [0, \infty)$ perusteella

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1 - y}{y}}.$$