

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot 2022

Demonstraatio 3, 20.9.2022

1. Ratkaise epäyhtälö $2^x + 2^{x+1} > 192$.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{x+1} &> 192 \\ \Leftrightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x &> 192 \\ \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x &> 192 \\ \Leftrightarrow 2^x &> 64 \\ \Leftrightarrow x &> \log_2 64 = 6 \end{aligned}$$

2. Arvioi kuinka monta numeroa tarvitaan kun 2^{2022} kirjoitetaan kymmenjärjestelmässä. Ohje: Mieti ensin mitä ovat $\log_{10} 10$, $\log_{10} 100$, $\log_{10} 1000$, jne. Miten luvun kymmenkantainen logaritmi liittyy kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden määrään?

Mallivastaus: $\log_{10} 10 = 1$, $\log_{10} 100 = 2$, $\log_{10} 1000 = 3$, jne. Luvun kymmenkantainen logaritmi näyttää liittyvän (suunnilleen) siihen kuinka monta numeroa kymmenjärjestelmässä tarvitaan luvun esittämiseen. Voidaan vielä lisäksi todeta, että esim. $\log_{10} 9 < 1$, $\log_{10} 99 < 2$, jne.

Tarkemmin: Voidaan todeta, että luvun x esitykseen vaadittavien numeroiden määrä kymmenjärjestelmässä on

$$\lfloor \log_{10} x \rfloor + 1,$$

missä $\lfloor \alpha \rfloor$ tarkoittaa luvun α katkaisua sitä lähinnä pienempään tai yhtäsuureen kokonaislukuun.

$$\log_{10}(2^{2022}) = 2022 \cdot \log_{10} 2 = 608.638 \dots,$$

mistä

$$\lfloor \log_{10}(2^{2022}) \rfloor + 1 = 608 + 1 = 609.$$

Näin ollen luvun esitys vie 609 numeroa kymmenjärjestelmässä.

3. Tiedetään, että $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Selvitä kaikki yhtälön $\sin x = \frac{1}{2}$ ratkaisut. Ohje: Käytä yksikköympyrää ja sinifunktion jaksollisuutta.

Vastaus: Yksikköympyrän avulla saadaan myös $\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, siis myös kulma $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ toteuttaa yhtälön. Näiden lisäksi yhtälön toteuttavat myös kaikki aiemmin löydettyihin lisätyt täyden ympyrän monikerrat:

$$\left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. Tiedetään, että $\alpha \in [0, \pi]$ ja että $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Mikä on $\sin \alpha$:n tarkka arvo? Entä kulman α likiarvo? Ohje: Käytä aluksi yhtälöä $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ja yksikköympyrää.

Mallivastaus: Koska $\alpha \in [0, \pi]$, on $\sin \alpha \geq 0$. Näin ollen $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. Likiarvo kulmalle α :

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{2}{3} = 0,729728 \dots$$

5. Käytä taulukkokirjasta tai Wikipediasta löytyviä trigonometrisia kaavoja ja sievennä

$$\sqrt{(\cos 2x - 1)^2 + (\sin 2x)^2}$$

niin yksinkertaiseksi kuin mahdollista. Tavoite: $2|\sin x|$.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\cos 2x - 1)^2 + (\sin 2x)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 2x - 2 \cos 2x + 1 + \sin^2 2x} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos 2x} \\ &= \sqrt{2(1 - \cos 2x)} \\ &= \sqrt{2(1 - (1 - 2 \sin^2 x))} \\ &= \sqrt{4 \sin^2 x} = 2 |\sin x| \end{aligned}$$

Huom: Seuraavissa tehtävissä i tarkoittaa imaginaariyksikköä

6. Sievennä $(5 + i)(4 - 3i)$, $(-2 + 3i)\overline{6 - 5i}$ ja $\frac{2 - 3i}{5 - 2i}$.

$$\begin{aligned} \text{Mallivastaus: } (5 + i)(4 - 3i) &= 20 - 15i + 4i - 3i^2 = 23 - 11i, \quad (-2 + 3i)\overline{6 - 5i} = \\ (-2 + 3i)(6 + 5i) &= -12 - 10i + 18i + 15i^2 = -27 + 8i \text{ ja } \frac{2 - 3i}{5 - 2i} = \frac{(2 - 3i)(5 + 2i)}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \\ \frac{10 + 4i - 15i - 6i^2}{25 + 10i - 10i - 4i^2} &= \frac{16 - 11i}{29} = \frac{16}{29} - \frac{11}{29}i. \end{aligned}$$

7. Etsi kaikki yhtälön $z^2 - 6z + 13 = 0$ ratkaisut.

$$\text{Mallivastaus: } z = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i.$$

8. Etsi napakoordinaattiesitys luvulle $-1 + i\sqrt{3}$.

Vastaus: $|-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Vaihekulmaa varten pitää etsiä yhtälön $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ ratkaisut. Yksi ratkaisu on $\theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$. Koska luvun vaihekulma on selvästi välillä $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, valitaan ratkaisuksi $-\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$. Näin ollen napakoordinaattiesitykseksi saadaan

$$2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

9. Määritä kaikki kompleksisen logaritmin $\text{Log}(-1 + i\sqrt{3})$ arvot.

Mallivastaus: Luvun kaikki polaariesitykset ovat $2e^{(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n)i}$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Näin ollen kaikki logaritmin arvot ovat

$$\text{Log}(-1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right),$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

10. Määritä potenssin $i^{\frac{1}{2}}$ kaikki arvot.

Mallivastaus: Ensin on etsittävä kaikki kantaluvun polaariesitykset. Itseisarvo $|i| = 1$ ja vaihekulmaksi voidaan valita $\frac{\pi}{2}$. Näin ollen kaikki polaariesitykset ovat $i = e^{(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)i}$, joten

$$\text{Log } i = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)i,$$

missä $n \in \mathbb{Z}$. Näin ollen

$$\frac{1}{2} \operatorname{Log} i = \left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)i,$$

joten

$$i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \operatorname{Log} i} = e^{\frac{\pi}{4}i} e^{i\pi n},$$

missä $n \in \mathbb{Z}$. Koska $e^{i\pi n}$ saa vain arvot $+1$ ja -1 , voidaan yllä oleva kirjoittaa muodossa

$$i^{\frac{1}{2}} = \pm e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Eulerin kaavan perusteella

$$e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$$

joten tulos voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$i^{\frac{1}{2}} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

11. Laske kertolasku $(z-1)(z^2+z+1)$ ja etsi sen perusteella kaikki yhtälön $z^3-1=0$ ratkaisut.

Mallivastaus: $(z-1)(z^2+z+1) = z^3 + z^2 + z - z^2 - z - 1 = z^3 - 1$. Yhtälö $z^3 = 1$ voidaan siis kirjoittaa muodossa $(z-1)(z^2+z+1) = 0$, jonka ratkaisut

$$\text{ovat } z = 1 \text{ ja } z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Huomautus. Vertaa tulosta luennolla esitettyihin kolmansien ykkösenjuuriin: $e^{\frac{2\pi}{3}ni}$, missä $n \in \{0, 1, 2\}$.

12. Etsi kaikki yhtälön $z^3 - 3z^2 + 3z - 2 = 0$ kaikki ratkaisut. Esitä ne muodossa, joista käy ilmi reaali- ja imaginaariosat. Ohje: Käytä binomikaavaa, merkitse $w = z - 1$ ja ratkaise ensin w .

Mallivastaus: Binomikaavan perusteella yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$(z-1)^3 = 1,$$

josta saadaan luvulle $z-1 = w$ kaikki mahdolliset arvot kolmansina ykkösenjuurina:

$$w = e^{\frac{2\pi}{3}i \cdot n},$$

missä $n \in \{0, 1, 2\}$. Näin ollen

$$z = 1 + e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot n},$$

missä $n \in \{0, 1, 2\}$. Arvolla $n = 0$ saadaan

$$1 + e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 0} = 2.$$

Arvolla $n = 1$ saadaan

$$1 + e^{\frac{2\pi i}{3}} = 1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Arvolla $n = 2$ saadaan

$$1 + e^{\frac{4\pi i}{3}} = 1 + \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$