

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

- Kaikki matemaattiset teorat voidaan esittää *aksiomaattis-deduktiivisessa* muodossa.
- Teorian peruskäsitteet ja -oliot esitetään määritelmänä ja niiden väliset suhteet tai *aksioomina*.
- Kaikki muut teorian väittämät (lauseet, teoreemat) johdetaan aksioomista loogisesti.
- Matemaattinen teoria: Niiden lauseiden joukko, jotka voidaan johtaa aksioomista.

Vaatimuksia aksiomatiikalle

- Peruskäsitteiden ja aksioomien pitäisi olla yksinkertaisia
- Aksioomia pitäisi olla vähän
- Aksioomien pitäisi olla ristiriidattomia

Peanon aksiomatisointi luonnollisille luvuille

Peruskäsitteet: Joukko $\mathbb{N}$, luku $1 \in \mathbb{N}$ ja luvun n seuraaja $s(n)$.

Aksioomat:

- 1 Jos $n \neq m$, niin $s(n) \neq s(m)$ (kahdella eri luonnollisella luvulla on eri seuraaja).
- 2 Kaikille joukon $\mathbb{N}$ alkioille n pätee $s(n) \neq 1$ (ykkönen ei ole minkään luonnollisen luvun seuraaja).
- 3 Jos joukko A sisältää luvun 1 ja jokaisen sisältämänsä luvun seuraajan, niin silloin A sisältää kaikki luonnolliset luvut (*induktioaksiooma*).

Päättelyn muotoja

- Deduktiivinen
 - Induktiivinen
 - Abduktiivinen
-
- Matematiikka rakennetaan yksinomaan deduktiivisen päättelyn turvin
 - Luonnontieteissä induktiivinen päättely on tyypillistä

Deduktiivinen päättely

- Äärellinen määrä päättelysääntöjä
- Oletusten ollessa tosia ovat johtopäätökset tosia
- "Loogisesti sitova"

Modus ponens

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi}$$

Syllogistinen logiikka



Aristoteles (384–322 eaa)

Syllogistinen logiikka

Premisseistä päätellään johtopäätös. Premissejä voi olla kaksi: Pääpremissi ja alipremissi

Esimerkki

Sokrates on ihminen
Sokrates on kuolevainen

Huomautus

Johtopäätös ei seuraa premissistä!

Esimerkki

Jokainen ihminen on kuolevainen
(pääpremissi)

Sokrates on ihminen
(alipremissi)

Sokrates on kuolevainen
(johtopäätös)

Huomautus

Johtopäätös seuraa premiseistä.

Kreikkalaiset aakkoset

alfa	A	α	ioota	I	ι	rhoo	P	ρ
beta	B	β	kappa	K	$\kappa, \varkappa$	sigma	Σ	σ, ς
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	T	τ
delta	Δ	δ	myy	M	μ	ypsilon	Υ	υ
epsilon	E	ϵ	nyy	N	ν	fii	Φ	ϕ, φ
zeeta	Z	ζ	ksii	Ξ	ξ	khii	X	χ
eeta	H	η	omikron	O	o	psii	Ψ	ψ
theeta	Θ	θ, ϑ	pii	Π	π, ϖ	oomega	Ω	ω

- $\wedge$ (konjunktio eli looginen ja)
- $\vee$ (disjunktio eli looginen tai)
- $\neg$ (negaatio eli looginen ei)
- $\rightarrow$ (implikaatio eli looginen seuraus)
- $\forall$ (universaalikvanttori)
- $\exists$ (eksistentiaalikvanttori)

Esimerkki

- Logiikan kaava $(x \geq 1) \wedge (y < 0)$ väittää, että $x \geq 1$ ja $y < 0$.
- Kaava $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ väittää, että jokainen x toteuttaa ehdon $x^2 \geq 0$.
- Kaava $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ väittää, että on olemassa sellainen x , että kaikille y :ille $y \leq x$
- Kaava $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - 3| < \delta \rightarrow |x^2 - 9| < \epsilon)$ väittää, että jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen positiiviluku δ , että ehdosta $|x - 3| < \delta$ seuraa $|x^2 - 9| < \epsilon$.

Joukko

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Merkintöjä

- $A = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$
- $\in$ on ns. *kaksipaikkainen relaationsymboli* ja merkintä $x \in A$ tulkitaan siten, että alkio x kuuluu joukkoon A
- $x \notin A$ tarkoittaa $\neg(x \in A)$
- Merkintä $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää sellaiset joukon A alkiot x , jotka toteuttavat pystyviivan oikealla puolella olevan kaavan $\phi(x)$

Esimerkki

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \wedge x \text{ pariton}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Määritelmä

- $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ (yhtäsuuruus)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ (osajoukko)
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (yhdiste eli unioni)
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (leikkaus eli intersektio)
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (erotus eli differenssi)
- $A = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin A)$ (tyhjä joukko)

Merkitys matematiikalle

- Melkein kaikki matematiikka on palautettavissa joukko-oppiin. Esimerkiksi voidaan sopia, että $\emptyset \leftrightarrow 0$, $\{\emptyset\} \leftrightarrow 1$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \leftrightarrow 2$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \leftrightarrow 3$, jne.
- Vain yksi relaationsymboli $\in$ tarpeen, muut määritellään siihen perustuen.
- Erittäin yksinkertainen teoreettinen perusta matematiikalle.

Tärkeimmät lukujoukot

- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,
- Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- Rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$,
- Reaalilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{R}$, ja
- Kompleksilukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{C}$.

Lukuvälit

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (suljettu väli)
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (avoin väli)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (puoliavoin väli, analogisesti $(a, b]$)
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ (suljettu puolisuora, analogisesti $(-\infty, a]$)
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ (avoin puolisuora, analogisesti $(-\infty, a)$)



Gottlob Frege (1848—1925)

- Propositio- ja predikaattilogiikka
- Matematiikan perusteet: Grundgesetze der Arithmetik (vol. 1 (1893), vol. 2 (1903))

Russellin paradoksi (1901)



Bertrand Russell (1872–1970)

Olkoon $A = \{X \mid X \notin X\}$. Onko $A \in A$?

Summa ja tulo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i$$

Huomautus

Summamerkinnässä 1 on summauksen alaraja, n yläraja ja i summausindeksi. Summausindeksin valinta ei ole tärkeä, vaan

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{k=1}^n a_k$$

Summamerkinnän käsittely

- $c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$
- $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1}$