

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Onko yhtälöllä $x^2 = -1$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Onko yhtälöllä $x^2 = -1$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Mistä johtuu eroavaisuus vastauksissa?

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Onko yhtälöllä $x^2 = -1$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Mistä johtuu eroavaisuus vastauksissa?
- Mitä tarkalleen ottaen ovat reaaliluvut?

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Onko yhtälöllä $x^2 = -1$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Mistä johtuu eroavaisuus vastauksissa?
- Mitä tarkalleen ottaen ovat reaaliluvut?
- Miksi $\sqrt{2}$ on olemassa joukossa $\mathbb{R}$?

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Onko yhtälöllä $x^2 = -1$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Mistä johtuu eroavaisuus vastauksissa?
- Mitä tarkalleen ottaen ovat reaaliluvut?
- Miksi $\sqrt{2}$ on olemassa joukossa $\mathbb{R}$?
- Miksi yhtälön $x^2 = -1$ ratkaisua ei ole joukossa $\mathbb{R}$?

Reaalilukujen aksiomatisointi

Peruskäsitteet: joukko $\mathbb{R}$, operaatiot $+$ ja $\cdot$, alkiot 0 ja $1 \in \mathbb{R}$.

Reaalilukujen aksiomatisointi

Peruskäsitteet: joukko $\mathbb{R}$, operaatiot $+$ ja $\cdot$, alkiot 0 ja $1 \in \mathbb{R}$.

Kunta-aksioomat:

- 1 Kaikille reaaliluvuille a , b ja c pätee $a + (b + c) = (a + b) + c$ ja $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- 2 Jokaiselle reaaliluvulle a pätee $0 + a = a$ ja $1 \cdot a = a$.
- 3 Jokaista reaalilukua a kohti on olemassa a :n *vastaluku* $-a$, joka toteuttaa $a + (-a) = 0$ ja jokaista nollasta eroavaa reaalilukua a kohti on olemassa käänteisluku a^{-1} , joka toteuttaa $a \cdot a^{-1} = 1$.
- 4 Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee $a + b = b + a$ ja $a \cdot b = b \cdot a$.
- 5 kaikille reaaliluvuille a , b , ja c pätee $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Määritelmä (Vähennys- ja jakolasku)

- $a - b = a + (-b)$
- Jos $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Määritelmä (Vähennys- ja jakolasku)

- $a - b = a + (-b)$
- Jos $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Huomautus

- Jokaisella luvulla voi olla vain yksi vastaluku.

Määritelmä (Vähennys- ja jakolasku)

- $a - b = a + (-b)$
- Jos $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Huomautus

- Jokaisella luvulla voi olla vain yksi vastaluku. Jos nimittäin a :n vastalukuja olisivat sekä a_1 ja a_2 , olisi
 $a + a_1 = 0 = a + a_2$,

Määritelmä (Vähennys- ja jakolasku)

- $a - b = a + (-b)$
- Jos $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Huomautus

- Jokaisella luvulla voi olla vain yksi vastaluku. Jos nimittäin a :n vastalukuja olisivat sekä a_1 ja a_2 , olisi $a + a_1 = 0 = a + a_2$, mistä voidaan päätellä, että $a_1 = a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = 0 + a_2 = a_2$

Määritelmä (Vähennys- ja jakolasku)

- $a - b = a + (-b)$
- Jos $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Huomautus

- Jokaisella luvulla voi olla vain yksi vastaluku. Jos nimittäin a :n vastalukuja olisivat sekä a_1 ja a_2 , olisi $a + a_1 = 0 = a + a_2$, mistä voidaan päätellä, että $a_1 = a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = 0 + a_2 = a_2$
- Samoin voidaan päätellä että jokaisella $a \neq 0$ voi olla vain yksi käänteisluku.

Määritelmä (Vähennys- ja jakolasku)

- $a - b = a + (-b)$
- Jos $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Huomautus

- Jokaisella luvulla voi olla vain yksi vastaluku. Jos nimittäin a :n vastalukuja olisivat sekä a_1 ja a_2 , olisi
 $a + a_1 = 0 = a + a_2$, mistä voidaan päätellä, että
 $a_1 = a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = 0 + a_2 = a_2$
- Samoin voidaan päätellä että jokaisella $a \neq 0$ voi olla vain yksi käänteisluku.
- $\frac{1}{a} = a^{-1}$.

Määritelmä (Vähennys- ja jakolasku)

- $a - b = a + (-b)$
- Jos $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Huomautus

- Jokaisella luvulla voi olla vain yksi vastaluku. Jos nimittäin a :n vastalukuja olisivat sekä a_1 ja a_2 , olisi $a + a_1 = 0 = a + a_2$, mistä voidaan päätellä, että $a_1 = a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = 0 + a_2 = a_2$
- Samoin voidaan päätellä että jokaisella $a \neq 0$ voi olla vain yksi käänteisluku.
- $\frac{1}{a} = a^{-1}$.
- Aksioomissa ei mainita, että kaikille $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 0 = 0$.

Määritelmä (Vähennys- ja jakolasku)

- $a - b = a + (-b)$
- Jos $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Huomautus

- Jokaisella luvulla voi olla vain yksi vastaluku. Jos nimittäin a :n vastalukuja olisivat sekä a_1 ja a_2 , olisi $a + a_1 = 0 = a + a_2$, mistä voidaan päätellä, että $a_1 = a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = 0 + a_2 = a_2$
- Samoin voidaan päätellä että jokaisella $a \neq 0$ voi olla vain yksi käänteisluku.
- $\frac{1}{a} = a^{-1}$.
- Aksioomissa ei mainita, että kaikille $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 0 = 0$. Tämä on looginen seuraus aksioomista.

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot 0 = 0)$$

Todistus:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot 0 = 0)$$

Todistus:

- $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot 0 = 0)$$

Todistus:

- $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$
- $\Rightarrow a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot 0 = 0)$$

Todistus:

- $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$
- $\Rightarrow a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$
- $\Rightarrow 0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0))$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot 0 = 0)$$

Todistus:

- $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$
- $\Rightarrow a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$
- $\Rightarrow 0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) = a \cdot 0 + 0$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot 0 = 0)$$

Todistus:

- $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$
- $\Rightarrow a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$
- $\Rightarrow 0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$

Järjestysaksioomat

On olemassa osajoukko $\mathbb{R}_+ \subsetneq \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- 1 Jokaista reaalilukua a kohti pätee tarkalleen yksi vaihtoehtoista $a \in \mathbb{R}_+$, $a = 0$ tai $-a \in \mathbb{R}_+$.
- 2 Jos $a, b \in \mathbb{R}_+$, niin $a + b$, $a \cdot b \in \mathbb{R}_+$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Järjestysaksioomat

On olemassa osajoukko $\mathbb{R}_+ \subsetneq \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- 1 Jokaista reaalilukua a kohti pätee tarkalleen yksi vaihtoehtoista $a \in \mathbb{R}_+$, $a = 0$ tai $-a \in \mathbb{R}_+$.
- 2 Jos $a, b \in \mathbb{R}_+$, niin $a + b$, $a \cdot b \in \mathbb{R}_+$.

Määritelmä

Suuremmuusrelaatio $>$ määritellään seuraavasti:

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+.$$

Reaalilukujen ominaisuuksia

Järjestysaksioomat

On olemassa osajoukko $\mathbb{R}_+ \subsetneq \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- 1 Jokaista reaalilukua a kohti pätee tarkalleen yksi vaihtoehtoista $a \in \mathbb{R}_+$, $a = 0$ tai $-a \in \mathbb{R}_+$.
- 2 Jos $a, b \in \mathbb{R}_+$, niin $a + b, a \cdot b \in \mathbb{R}_+$.

Määritelmä

Suuremmuusrelaatio $>$ määritellään seuraavasti:

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+.$$

Relaatio $\geq$ määritellään ehdolla

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

Reaalilukujen ominaisuuksia

Järjestysaksioomat

On olemassa osajoukko $\mathbb{R}_+ \subsetneq \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- 1 Jokaista reaalilukua a kohti pätee tarkalleen yksi vaihtoehtoista $a \in \mathbb{R}_+$, $a = 0$ tai $-a \in \mathbb{R}_+$.
- 2 Jos $a, b \in \mathbb{R}_+$, niin $a + b, a \cdot b \in \mathbb{R}_+$.

Määritelmä

Suuremmuusrelaatio $>$ määritellään seuraavasti:

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+.$$

Relaatio $\geq$ määritellään ehdolla

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

Relaatiot $<$ ja $\leq$ määritellään analogisesti.

Lause

Jos $a > b$ ja $b > c$, niin $a > c$.

Lause

Jos $a > b$ ja $b > c$, niin $a > c$.

Todistus:

Lause

Jos $a > b$ ja $b > c$, niin $a > c$.

Todistus:

Ensinnäkin $a > b$ tarkoittaa että $a - b \in \mathbb{R}_+$ ja vastaavasti $b > c$ tarkoittaa että $b - c \in \mathbb{R}_+$.

Lause

Jos $a > b$ ja $b > c$, niin $a > c$.

Todistus:

Ensinnäkin $a > b$ tarkoittaa että $a - b \in \mathbb{R}_+$ ja vastaavasti $b > c$ tarkoittaa että $b - c \in \mathbb{R}_+$.

Järjestysaksioomien mukaan tällöin pätee

$$a - c = \underbrace{a - b}_{\in \mathbb{R}_+} + \underbrace{b - c}_{\in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_+,$$

Lause

Jos $a > b$ ja $b > c$, niin $a > c$.

Todistus:

Ensinnäkin $a > b$ tarkoittaa että $a - b \in \mathbb{R}_+$ ja vastaavasti $b > c$ tarkoittaa että $b - c \in \mathbb{R}_+$.

Järjestysaksioomien mukaan tällöin pätee

$$a - c = \underbrace{a - b}_{\in \mathbb{R}_+} + \underbrace{b - c}_{\in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_+,$$

mikä puolestaan tarkoittaa että $a > c$.

Lause

Jos $a > b$ ja $b > c$, niin $a > c$.

Todistus:

Ensinnäkin $a > b$ tarkoittaa että $a - b \in \mathbb{R}_+$ ja vastaavasti $b > c$ tarkoittaa että $b - c \in \mathbb{R}_+$.

Järjestysaksioomien mukaan tällöin pätee

$$a - c = \underbrace{a - b}_{\in \mathbb{R}_+} + \underbrace{b - c}_{\in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_+,$$

mikä puolestaan tarkoittaa että $a > c$.

Tehtävä

Mieti miksi pitää olla $1 \in \mathbb{R}_+$ ja miksi $(-1)a = -a$.

Lause

Jos $a < c$ ja $b < d$, niin $a + b < c + d$.

Lause

Jos $a < c$ ja $b < d$, niin $a + b < c + d$.

Todistus. $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$.

Lause

Jos $a < c$ ja $b < d$, niin $a + b < c + d$.

Todistus. $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$.

Tällöin $c + d - (a + b) = c - a + d - b \in \mathbb{R}_+$, siis

$$a + b < c + d$$

Lause

Jos $a < c$ ja $b < d$, niin $a + b < c + d$.

Todistus. $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$.

Tällöin $c + d - (a + b) = c - a + d - b \in \mathbb{R}_+$, siis

$$a + b < c + d$$

Lause

Jos $0 < a < c$ ja $0 < b < d$, niin $ab < cd$

Lause

Jos $a < c$ ja $b < d$, niin $a + b < c + d$.

Todistus. $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$.

Tällöin $c + d - (a + b) = c - a + d - b \in \mathbb{R}_+$, siis

$$a + b < c + d$$

Lause

Jos $0 < a < c$ ja $0 < b < d$, niin $ab < cd$

Todistus: $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat sitä, että $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$.

Lause

Jos $a < c$ ja $b < d$, niin $a + b < c + d$.

Todistus. $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$.

Tällöin $c + d - (a + b) = c - a + d - b \in \mathbb{R}_+$, siis

$$a + b < c + d$$

Lause

Jos $0 < a < c$ ja $0 < b < d$, niin $ab < cd$

Todistus: $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat sitä, että $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$. Lisäksi aiemmin havaitun mukaan ehdoista $0 < a$ ja $a < c$ seuraa $0 < c$, siis $c \in \mathbb{R}_+$.

Lause

Jos $a < c$ ja $b < d$, niin $a + b < c + d$.

Todistus. $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$.

Tällöin $c + d - (a + b) = c - a + d - b \in \mathbb{R}_+$, siis

$$a + b < c + d$$

Lause

Jos $0 < a < c$ ja $0 < b < d$, niin $ab < cd$

Todistus: $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat sitä, että $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$. Lisäksi aiemmin havaitun mukaan ehdoista $0 < a$ ja $a < c$ seuraa $0 < c$, siis $c \in \mathbb{R}_+$. Tällöin

$$cd - ab = cd - cb + cb - ab = c(d - b) + b(c - a) \in \mathbb{R}_+,$$

Lause

Jos $a < c$ ja $b < d$, niin $a + b < c + d$.

Todistus. $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$.

Tällöin $c + d - (a + b) = c - a + d - b \in \mathbb{R}_+$, siis

$$a + b < c + d$$

Lause

Jos $0 < a < c$ ja $0 < b < d$, niin $ab < cd$

Todistus: $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat sitä, että $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$. Lisäksi aiemmin havaitun mukaan ehdoista $0 < a$ ja $a < c$ seuraa $0 < c$, siis $c \in \mathbb{R}_+$. Tällöin

$$cd - ab = cd - cb + cb - ab = c(d - b) + b(c - a) \in \mathbb{R}_+,$$

siis $ab < cd$.

Itseisarvo

Määritelmä:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Itseisarvo

Määritelmä:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Huomautus

- $|x| \geq 0$.
- $|xy| = |x| |y|$.
- $-|x| \leq x \leq |x|$

Itseisarvo

Määritelmä:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Huomautus

- $|x| \geq 0$.
- $|xy| = |x| |y|$.
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- Jos $-|y| \leq x \leq |y|$, niin $|x| \leq |y|$.

Itseisarvo

Määritelmä:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Huomautus

- $|x| \geq 0$.
- $|xy| = |x| |y|$.
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- Jos $-|y| \leq x \leq |y|$, niin $|x| \leq |y|$.
- $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Itseisarvo

Määritelmä:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Huomautus

- $|x| \geq 0$.
- $|xy| = |x| |y|$.
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- Jos $-|y| \leq x \leq |y|$, niin $|x| \leq |y|$.
- $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Itseisarvo

Määritelmä:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Huomautus

- $|x| \geq 0$.
- $|xy| = |x| |y|$.
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- Jos $-|y| \leq x \leq |y|$, niin $|x| \leq |y|$.
- $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Kolmioepähtälö

Epähtälöä $|x + y| \leq |x| + |y|$ kutsutaan *kolmioepähtälöksi*.

Metriikka

Kahden reaaliluvun välinen etäisyys $d(x, y)$ määritellään seuraavasti: $d(x, y) = |x - y|$

Metriikka

Kahden reaaliluvun välinen etäisyys $d(x, y)$ määritellään seuraavasti: $d(x, y) = |x - y|$

Lause

Kaikille reaaliluvuille x , y ja z pätee

Metriikka

Kahden reaaliluvun välinen etäisyys $d(x, y)$ määritellään seuraavasti: $d(x, y) = |x - y|$

Lause

Kaikille reaaliluvuille x , y ja z pätee

- $d(x, y) \geq 0$ ja $d(x, y) = 0$ vain jos $x = y$.

Metriikka

Kahden reaaliluvun välinen etäisyys $d(x, y)$ määritellään seuraavasti: $d(x, y) = |x - y|$

Lause

Kaikille reaaliluvuille x , y ja z pätee

- $d(x, y) \geq 0$ ja $d(x, y) = 0$ vain jos $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.

Metriikka

Kahden reaaliluvun välinen etäisyys $d(x, y)$ määritellään seuraavasti: $d(x, y) = |x - y|$

Lause

Kaikille reaaliluvuille x , y ja z pätee

- $d(x, y) \geq 0$ ja $d(x, y) = 0$ vain jos $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Lause

Sekä $d(a + b, c + d)$ että $d(ab, cd)$ saadaan miten pieniksi hyvänsä, kunhan $d(a, c)$ ja $d(b, d)$ valitaan riittävän pieniksi.

Lause

Sekä $d(a + b, c + d)$ että $d(ab, cd)$ saadaan miten pieniksi hyvänsä, kunhan $d(a, c)$ ja $d(b, d)$ valitaan riittävän pieniksi.

- $$d(a + b, c + d) = |a + b - (c + d)| = |a - c + b - d| \leq |a - c| + |b - d| = d(a, c) + d(b, d)$$

Lause

Sekä $d(a + b, c + d)$ että $d(ab, cd)$ saadaan miten pieniksi hyvänsä, kunhan $d(a, c)$ ja $d(b, d)$ valitaan riittävän pieniksi.

- $d(a + b, c + d) = |a + b - (c + d)| = |a - c + b - d| \leq |a - c| + |b - d| = d(a, c) + d(b, d)$
- $d(ab, cd) = |ab - cd| = |ab - ad + ad - cd| = |a(b - d) + (a - c)d| \leq |a| |b - d| + |a - c| |d| = |a| d(b, d) + |d| d(a, c).$

Lause

Sekä $d(a + b, c + d)$ että $d(ab, cd)$ saadaan miten pieniksi hyvänsä, kunhan $d(a, c)$ ja $d(b, d)$ valitaan riittävän pieniksi.

- $d(a + b, c + d) = |a + b - (c + d)| = |a - c + b - d| \leq |a - c| + |b - d| = d(a, c) + d(b, d)$
- $d(ab, cd) = |ab - cd| = |ab - ad + ad - cd| = |a(b - d) + (a - c)d| \leq |a| |b - d| + |a - c| |d| = |a| d(b, d) + |d| d(a, c).$

Esimerkki

$$d(x^2, 9) = |x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)| = |x + 3| d(x, 3).$$

Jos x on niin lähellä lukua 3 että $d(x, 3) < 1$, on silloin $2 < x < 4$ ja siksi $|x + 3| < 4 + 3 = 7$. Tällöin siis $d(x^2, 9) < 7d(x, 3)$.

Huomautus

Myös rationaalilukujen joukko toteuttaa sekä kunta- että järjestysaksiomat. Ratkaisua yhtälöön $x^2 = 2$ ei kuitenkaan ole joukossa $\mathbb{Q}$.

Huomautus

Myös rationaalilukujen joukko toteuttaa sekä kunta- että järjestysaksioomat. Ratkaisua yhtälöön $x^2 = 2$ ei kuitenkaan ole joukossa $\mathbb{Q}$.

Määritelmä

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- Luku M on joukon A *yläraja*, mikäli $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \leq M)$
- Luku $S = \sup A$ on joukon A *pienin yläraja*, *supremum*, jos S on yläraja ja

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists a \in A)(a > S - \epsilon)$$

Reaalilukujen ominaisuuksia

Huomautus

Myös rationaalilukujen joukko toteuttaa sekä kunta- että järjestysaksioomat. Ratkaisua yhtälöön $x^2 = 2$ ei kuitenkaan ole joukossa $\mathbb{Q}$.

Määritelmä

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- Luku M on joukon A *yläraja*, mikäli $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \leq M)$
- Luku $S = \sup A$ on joukon A *pienin yläraja*, *supremum*, jos S on yläraja ja

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists a \in A)(a > S - \epsilon)$$

Täydellisyysaksiooma

Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on olemassa *pienin yläraja*.

Esimerkki

Rationaalilukujen jono $3; 3, 1; 3, 14; 3, 141; 3, 1415; 3, 14159 \dots$ on kasvava jono. Jos oletetaan tunnetuksi, että jono on ylhäältä rajoitettu, on täydellisyysaksiooman perusteella olemassa reaaliluku π joka on mainitun lukujoukon pienin yläraja.

Esimerkki

Rationaalilukujen jono $3; 3, 1; 3, 14; 3, 141; 3, 1415; 3, 14159 \dots$ on kasvava jono. Jos oletetaan tunnetuksi, että jono on ylhäältä rajoitettu, on täydellisyysaksiooman perusteella olemassa reaaliluku π joka on mainitun lukujoukon pienin yläraja. Tämä on se reaaliluku, jota edellämainittu rationaalilukujen jono lähestyy.

Esimerkki

Rationaalilukujen jono $3; 3, 1; 3, 14; 3, 141; 3, 1415; 3, 14159 \dots$ on kasvava jono. Jos oletetaan tunnetuksi, että jono on ylhäältä rajoitettu, on täydellisyysaksiooman perusteella olemassa reaaliluku π joka on mainitun lukujoukon pienin yläraja. Tämä on se reaaliluku, jota edellämainittu rationaalilukujen jono lähestyy.

Huomautus

Jos valitaan mikä hyvänsä jono rationaalilukuja $r_1 < r_2 < r_3 \dots < M$, niin täydellisyysaksiooman nojalla on olemassa sellainen reaaliluku α , jota jono $r_1, r_2, r_3, \dots$ lähestyy. Pienimmän ylärajan ominaisuudesta nimittäin seuraa, että $\forall \epsilon > 0$ $\alpha - \epsilon$ ei ole ko. jonon yläraja, ja siis on olemassa sellainen r_n että $\alpha - \epsilon < r_n < \alpha$.

Ei ääretöntä alkiota

$$M + 1 > M + 0 = M$$

Ei ääretöntä alkia

$$M + 1 > M + 0 = M$$

Määritelmä

Luku $\epsilon > 0$ on *infinitesimaali* eli äärettömän pieni, jos $\forall n$

$$n \cdot \epsilon = \underbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}_{n \text{ kpl}} < 1$$

Reaalilukujen ominaisuuksia

Ei ääretöntä alkioita

$$M + 1 > M + 0 = M$$

Määritelmä

Luku $\epsilon > 0$ on *infinitesimaali* eli äärettömän pieni, jos $\forall n$

$$n \cdot \epsilon = \underbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}_{n \text{ kpl}} < 1$$

Ei infinitesimaaleja

Jos olisi $(\forall n) n\epsilon < M$, on joukko $A = \{n\epsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$ ylhäältä rajoitettu ja näin ollen sillä on pienin yläraja S .

Reaalilukujen ominaisuuksia

Ei ääretöntä alkiota

$$M + 1 > M + 0 = M$$

Määritelmä

Luku $\epsilon > 0$ on *infinitesimaali* eli äärettömän pieni, jos $\forall n$

$$n \cdot \epsilon = \underbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}_{n \text{ kpl}} < 1$$

Ei infinitesimaaleja

Jos olisi $(\forall n) n\epsilon < M$, on joukko $A = \{n\epsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$ ylhäältä rajoitettu ja näin ollen sillä on pienin yläraja S . Näin ollen $S - \epsilon$ ei ole joukon yläraja ja siksi $(\exists m) m\epsilon > S - \epsilon$, mistä seuraa $(m + 1)\epsilon > S$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Ei ääretöntä alkia

$$M + 1 > M + 0 = M$$

Määritelmä

Luku $\epsilon > 0$ on *infinitesimaali* eli äärettömän pieni, jos $\forall n$

$$n \cdot \epsilon = \underbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}_{n \text{ kpl}} < 1$$

Ei infinitesimaaleja

Jos olisi $(\forall n) n\epsilon < M$, on joukko $A = \{n\epsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$ ylhäältä rajoitettu ja näin ollen sillä on pienin yläraja S . Näin ollen $S - \epsilon$ ei ole joukon yläraja ja siksi $(\exists m) m\epsilon > S - \epsilon$, mistä seuraa $(m + 1)\epsilon > S$. Mutta $(m + 1)\epsilon \in A$, joten S ei olekaan joukon yläraja.

Seurauksia

- Jokaisella välillä (a, b) on rationaaliluku r ja irrationaaliluku α

Seurauksia

- Jokaisella välillä (a, b) on rationaaliluku r ja irrationaaliluku α
- Desimaaliesitys

Seurauksia

- Jokaisella välillä (a, b) on rationaaliluku r ja irrationaaliluku α
- Desimaaliesitys
- Rationaaliset approksimaatiot.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funktio on *surjektiivinen*, jos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funktio on *surjektiivinen*, jos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$.
- Funktio on *bijektiivinen*, jos se on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funktio on *surjektiivinen*, jos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$.
- Funktio on *bijektiivinen*, jos se on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

Luonnehdinta

Injektiivisen funktion kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa korkeintaan kerran.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funktio on *surjektiivinen*, jos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$.
- Funktio on *bijektiivinen*, jos se on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

Luonnehdinta

Injektiivisen funktion kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa korkeintaan kerran. Surjektiivisen funktion kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa ainakin kerran.

Määritelmä

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

Määritelmä

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$
- Reaalifunktio on (aidosti) *vähenevä*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Määritelmä

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$
- Reaalifunktio on (aidosti) *vähenevä*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$
- Reaalifunktio on (aidosti) *monotoninen*, jos se on joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä.

Määritelmä

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$
- Reaalifunktio on (aidosti) *vähenevä*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$
- Reaalifunktio on (aidosti) *monotoninen*, jos se on joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä.

Lause

Aidosti monotoninen reaalifunktio on injektiivinen.

Määritelmä

Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ (reaali)funktioita. Tällöin $g \circ f : A \rightarrow C$ on *yhdistetty funktio*, joka määritellään

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Määritelmä

Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ (reaali)funktioita. Tällöin $g \circ f : A \rightarrow C$ on *yhdistetty funktio*, joka määritellään

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Tässä merkinnässä funktiota g kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota f *sisäfunktioksi*.

Määritelmä

Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ (reaali)funktioita. Tällöin $g \circ f : A \rightarrow C$ on *yhdistetty funktio*, joka määritellään

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Tässä merkinnässä funktiota g kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota f *sisäfunktioksi*.

Esimerkki

Jos $f(x) = -x^2$ ja $g(x) = e^x$, on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{-x^2}.$$

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio. Jos on olemassa sellainen (reaali)funktio $g : B \rightarrow A$, että $(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$ ja $(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$, sanotaan että g on f :n *käänteisfunktio* ja merkitään $g = f^{-1}$.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio. Jos on olemassa sellainen (reaali)funktio $g : B \rightarrow A$, että $(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$ ja $(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$, sanotaan että g on f :n *käänteisfunktio* ja merkitään $g = f^{-1}$.

Lause

- Funktiolla $f : A \rightarrow B$ on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : B \rightarrow A$ tarkalleen silloin kun f on bijektiivinen.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio. Jos on olemassa sellainen (reaali)funktio $g : B \rightarrow A$, että $(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$ ja $(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$, sanotaan että g on f :n *käänteisfunktio* ja merkitään $g = f^{-1}$.

Lause

- Funktiolla $f : A \rightarrow B$ on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : B \rightarrow A$ tarkalleen silloin kun f on bijektiivinen.
- Jos funktio on (aidosti) kasvava/vähenevä, niin myös sen käänteisfunktio on.

Esimerkki

Funktio $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ on bijektio. Sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Esimerkki

Funktio $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ on bijektio. Sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ on bijektio. Sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

Esimerkki

Funktio $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ on bijektio. Sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ on bijektio. Sen käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

Esimerkki

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ei ole injektio, eikä surjektio. Näin ollen sillä ei ole käänteisfunktioita.

Polynomifunktiot

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$.

Reaalifunktiot

Polynomifunktiot

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$.

Rationaalifunktiot

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

missä p ja q ovat polynomeja. Rationaalifunktio ei ole määritelty sellaisille reaaliluvuille, joille $q(x) = 0$.

Polynomifunktiot

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$.

Rationaalifunktiot

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

missä p ja q ovat polynomeja. Rationaalifunktio ei ole määritelty sellaisille reaaliluvuille, joille $q(x) = 0$.

Esimerkkejä

- $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ esittää polynomifunktiota

Reaalifunktiot

Polynomifunktiot

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$.

Rationaalifunktiot

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

missä p ja q ovat polynomeja. Rationaalifunktio ei ole määritelty sellaisille reaaliluvuille, joille $q(x) = 0$.

Esimerkkejä

- $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ esittää polynomifunktiota
- $r(x) = \frac{1+x}{1-x}$ esittää rationaalifunktiota, joka on määritelty kun $x \neq 1$.

Eksponenttifunktiot

Kun $a \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$, määritellään

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

EkspONENTTIFUNKTIOT

Kun $a \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$, määritellään

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

Selvästi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{ja} \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Eksponenttifunktiot

Kun $a \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$, määritellään

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

Selvästi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{ja} \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Miten pitää määritellä a^0 ?

Eksponenttifunktiot

Kun $a \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$, määritellään

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

Selvästi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{ja} \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Miten pitää määritellä a^0 ?

$$a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0.$$

EkspONENTTIFUNKTIOT

Kun $a \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$, määritellään

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

Selvästi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{ja} \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Miten pitää määritellä a^0 ?

$$a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0.$$

Tästä seuraa, että $a^0 = 1$.

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^{-n} , kun $n \in \mathbb{N}$?

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^{-n} , kun $n \in \mathbb{N}$?

$$1 = a^0 = a^{-n+n} = a^{-n}a^n,$$

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^{-n} , kun $n \in \mathbb{N}$?

$$1 = a^0 = a^{-n+n} = a^{-n}a^n,$$

josta

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}.$$

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^r , kun $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$?

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^r , kun $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$?

Pitäisi olla

$$(a^r)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^r , kun $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$?

Pitäisi olla

$$(a^r)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

Määritelmä

Olkoon $b > 0$. Luvun b n :s juuri on positiivinen reaaliluku β , joka toteuttaa yhtälön $\beta^n = b$. Tätä merkitään symbolilla $\beta = \sqrt[n]{b}$.

EkspONENTTIFUNKTIOT

Miten pitää määritellä a^r , kun $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$?

Pitäisi olla

$$(a^r)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

MÄÄRITELMÄ

Olkoon $b > 0$. Luvun b n :s juuri on positiivinen reaaliluku β , joka toteuttaa yhtälön $\beta^n = b$. Tätä merkitään symbolilla $\beta = \sqrt[n]{b}$.

Edellämainitun perusteella pitää määritellä

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

(Mieti mistä viimeisin yhtäsuuruus johtuu)

Eksponenttifunktio

Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, miten a^x pitää määritellä?

Eksponenttifunktio

Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, miten a^x pitää määritellä? On mahdollista valita rationaalilukujono $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots$ jolle $x = \sup\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$

Eksponenttifunktio

Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, miten a^x pitää määritellä? On mahdollista valita rationaalilukujono $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots$ jolle $x = \sup\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ ja määritellä $a^x = \sup\{a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots\}$

Eksponenttifunktio

Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, miten a^x pitää määritellä? On mahdollista valita rationaalilukujono $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots$ jolle $x = \sup\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ ja määritellä $a^x = \sup\{a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots\}$

Eksponenttifunktio

Edellä kuvatulla menettelyllä voidaan määritellä funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = a^x$

Ominaisuuksia

- $a^{x+y} = a^x a^y$

Ominaisuuksia

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- Jos $0 < a < 1$, on f aidosti vähenevä ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x kasvaa rajatta mutta kasvavat rajatta kun x pienenee rajatta

Ominaisuuksia

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- Jos $0 < a < 1$, on f aidosti vähenevä ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x kasvaa rajatta mutta kasvavat rajatta kun x pienenee rajatta
- Arvoilla $a > 1$ f on aidosti kasvava ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x pienenee rajatta ja f :n arvot kasvavat rajatta kun x kasvaa rajatta

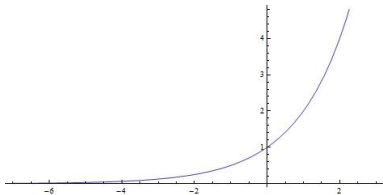
Ominaisuuksia

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- Jos $0 < a < 1$, on f aidosti vähenevä ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x kasvaa rajatta mutta kasvavat rajatta kun x pienenee rajatta
- Arvoilla $a > 1$ f on aidosti kasvava ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x pienenee rajatta ja f :n arvot kasvavat rajatta kun x kasvaa rajatta
- Molemmissa tapauksissa bijektio.

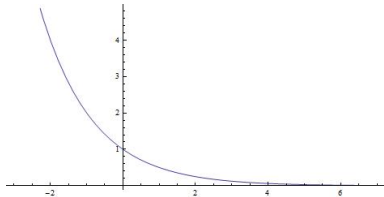
Ominaisuuksia

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- Jos $0 < a < 1$, on f aidosti vähenevä ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x kasvaa rajatta mutta kasvavat rajatta kun x pienenee rajatta
- Arvoilla $a > 1$ f on aidosti kasvava ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x pienenee rajatta ja f :n arvot kasvavat rajatta kun x kasvaa rajatta
- Molemmissa tapauksissa bijektio.
- Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$

$$y = 2^x$$



$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



Logaritmi

Logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Logaritmi

Logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Logaritmifunktio toteuttaa ehdot

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

Logaritmi

Logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Logaritmifunktio toteuttaa ehdot

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$.

Logaritmi

Logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Logaritmifunktio toteuttaa ehdot

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$.
- Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$

Logaritmi

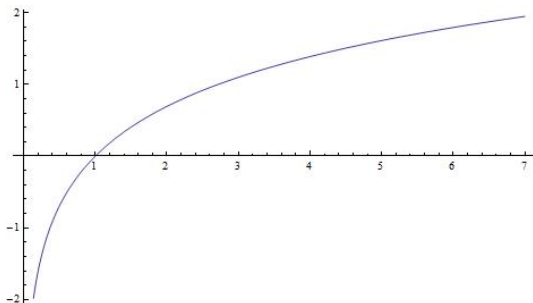
Logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Logaritmifunktio toteuttaa ehdot

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$.
- Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$ ja siis
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{c}$

$$y = \ln x = \log_e x, \quad e = 2,71828182845904523536 \dots$$



Esimerkki

Kuinka suureksi x pitää valita, että $2^x > 10^9$?

Esimerkki

Kuinka suureksi x pitää valita, että $2^x > 10^9$?

Koska eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ on aidosti kasvava ja $\log_2$ tämän käänteisfunktiona niinkään aidosti kasvava,

Esimerkki

Kuinka suureksi x pitää valita, että $2^x > 10^9$?

Koska eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ on aidosti kasvava ja $\log_2$ tämän käänteisfunktiona niinkään aidosti kasvava, voidaan epäyhtälöstä päätellä $\log_2(2^x) > \log_2(10^9)$,

Esimerkki

Kuinka suureksi x pitää valita, että $2^x > 10^9$?

Koska eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ on aidosti kasvava ja $\log_2$ tämän käänteisfunktiona niinkään aidosti kasvava, voidaan epäyhtälöstä päätellä $\log_2(2^x) > \log_2(10^9)$, mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$x > 9 \log_2(10) = 29.897 \dots$$

Trigonometriset funktiot

"Määritelmä"

Ympyräsektorin kulman suuruus on sektorin kaaren pituus jaettuna säteen pituudella. Tällöin kulma x (asteissa) voidaan muuntaa kulmaksi y (radiaaneissa) seuraavasti: $y = \frac{\pi}{180}x$. Suoran kulman suuruus on siis $\frac{\pi}{2}$, oikokulman π ja täyden ympyrän 2π .

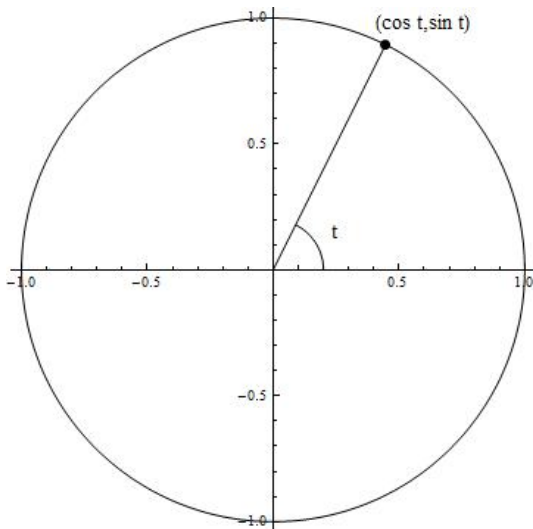
"Määritelmä"

Ympyräsektorin kulman suuruus on sektorin kaaren pituus jaettuna säteen pituudella. Tällöin kulma x (asteissa) voidaan muuntaa kulmaksi y (radiaaneissa) seuraavasti: $y = \frac{\pi}{180}x$. Suoran kulman suuruus on siis $\frac{\pi}{2}$, oikokulman π ja täyden ympyrän 2π .

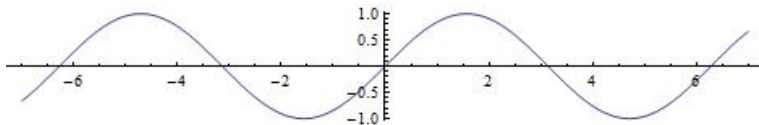
"Määritelmä"

Kulman, joka kiertyy positiiviselta x -akselilta myötäpäivään *kehäpiste* on origokeskisen yksikköympyrän ja kulman vasemman kyljen leikkauspiste. Tämän kulman *sini* on kehäpisteen y -koordinaatti ja *kosini* x -koordinaatti.

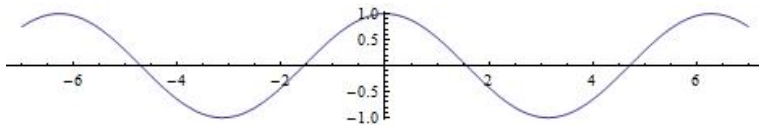
Trigonometriset funktiot



Trigonometriset funktiot

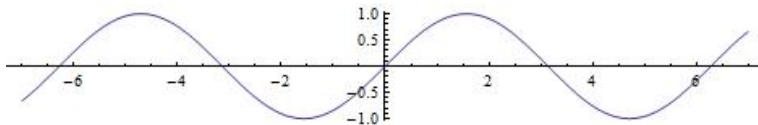


$$y = \sin x$$

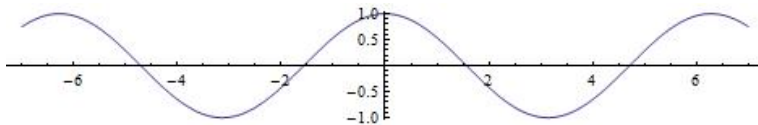


$$y = \cos x$$

Trigonometriset funktiot



$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Jaksollisuus

$$\sin x = \sin(x + 2\pi n) \quad \text{ja} \quad \cos x = \cos(x + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Jaksollisuus

$$\sin x = \sin(x + 2\pi n) \quad \text{ja} \quad \cos x = \cos(x + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Nollakohdat

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Jaksollisuus

$$\sin x = \sin(x + 2\pi n) \quad \text{ja} \quad \cos x = \cos(x + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

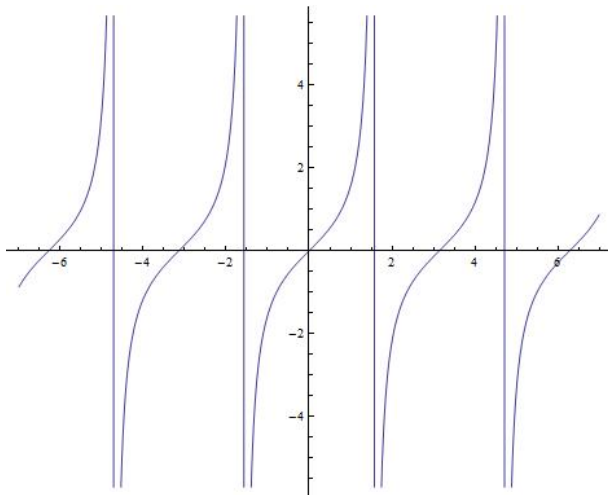
Nollakohdat

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Trigonometriset kaavat

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, jne.

Trigonometriset funktiot

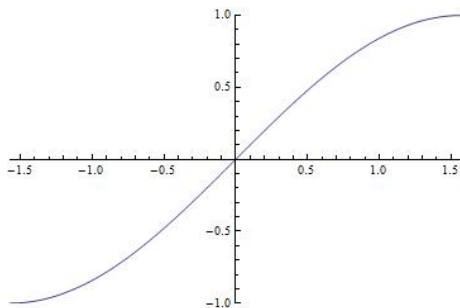


$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1] \qquad \sin^{-1} : [0, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

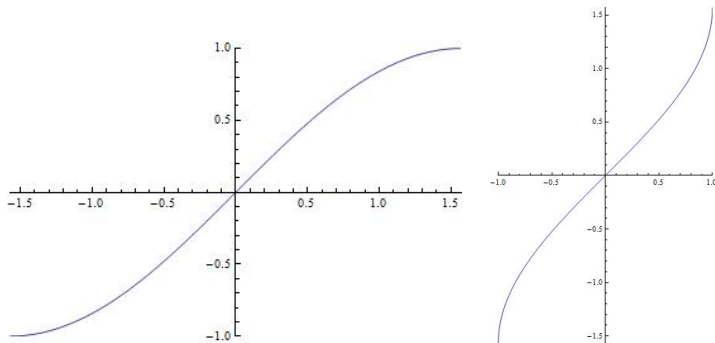
Trigonometriset funktiot

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1] \quad \sin^{-1} : [0, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Trigonometriset funktiot

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1] \quad \sin^{-1} : [0, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Käänteisfunktiot

- Funktion $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ käänteisfunktio on nimeltään *arkussini*, merkitään $\arcsin$ tai $\sin^{-1}$.

Käänteisfunktiot

- Funktion $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ käänteisfunktio on nimeltään *arkussini*, merkitään $\arcsin$ tai $\sin^{-1}$.
- Funktion $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ käänteisfunktio on nimeltään *arkuskosini*, merkitään $\arccos$ tai $\cos^{-1}$.

Käänteisfunktiot

- Funktion $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ käänteisfunktio on nimeltään *arkussini*, merkitään $\arcsin$ tai $\sin^{-1}$.
- Funktion $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ käänteisfunktio on nimeltään *arkuskosini*, merkitään $\arccos$ tai $\cos^{-1}$.
- Funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ käänteisfunktio on nimeltään *arkustangentti*, merkitään $\arctan$ tai $\tan^{-1}$.

Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$

Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$

Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$

Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$

Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $|\sin x| \leq |x|$

Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $|\sin x| \leq |x|$
- $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $|\sin x| \leq |x|$
- $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

$$|\sin x - \sin y| = \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right|$$

Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $|\sin x| \leq |x|$
- $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &= \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \cdot 1 \end{aligned}$$

Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $|\sin x| \leq |x|$
- $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &= \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \cdot 1 \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| \end{aligned}$$

Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $|\sin x| \leq |x|$
- $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &= \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \cdot 1 \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y| \end{aligned}$$

Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $|\sin x| \leq |x|$
- $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &= \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \cdot 1 \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y|, \end{aligned}$$

siis $d(\sin x, \sin y) \leq d(x, y)$.

Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $|\sin x| \leq |x|$
- $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &= \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \cdot 1 \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y|, \end{aligned}$$

siis $d(\sin x, \sin y) \leq d(x, y)$. Samoin $d(\cos x, \cos y) \leq d(x, y)$.

Algebralliset funktiot

Kahden muuttujan polynomiyhtälö $P(x, y) = 0$ saattaa määritellä funktion $f : A \rightarrow B$, $y = f(x)$ kunhan joukot A ja B valitaan sopivasti. Tällaisia funktioita sanotaan *algebrallisiksi*. Tällöin siis x on alkukuva ja y on kuva.

Kahden muuttujan polynomi yhtälö $P(x, y) = 0$ saattaa määritellä funktion $f : A \rightarrow B$, $y = f(x)$ kunhan joukot A ja B valitaan sopivasti. Tällaisia funktioita sanotaan *algebrallisiksi*. Tällöin siis x on alkukuva ja y on kuva.

Esimerkki

Polynomi yhtälö $x^2 + y^2 - 1 = 0$ määrittelee yksikköympyrän. Mikäli valitaan $A = [-1, 1]$ ja $B = [0, \infty)$, saadaan aikaan funktio $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Kahden muuttujan polynomi yhtälö $P(x, y) = 0$ saattaa määritellä funktion $f : A \rightarrow B$, $y = f(x)$ kunhan joukot A ja B valitaan sopivasti. Tällaisia funktioita sanotaan *algebrallisiksi*. Tällöin siis x on alkukuva ja y on kuva.

Esimerkki

Polynomi yhtälö $x^2 + y^2 - 1 = 0$ määrittelee yksikköympyrän. Mikäli valitaan $A = [-1, 1]$ ja $B = [0, \infty)$, saadaan aikaan funktio $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Esimerkki

Polynomi yhtälö $x^2 - y^2 = 0$ voidaan kirjoittaa muotoon $(x - y)(x + y) = 0$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $x = y$ tai $x = -y$.

Algebralliset funktiot

Kahden muuttujan polynomiyhtälö $P(x, y) = 0$ saattaa määritellä funktion $f : A \rightarrow B$, $y = f(x)$ kunhan joukot A ja B valitaan sopivasti. Tällaisia funktioita sanotaan *algebrallisiksi*. Tällöin siis x on alkukuva ja y on kuva.

Esimerkki

Polynomiyhtälö $x^2 + y^2 - 1 = 0$ määrittelee yksikköympyrän. Mikäli valitaan $A = [-1, 1]$ ja $B = [0, \infty)$, saadaan aikaan funktio $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Esimerkki

Polynomiyhtälö $x^2 - y^2 = 0$ voidaan kirjoittaa muotoon $(x - y)(x + y) = 0$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $x = y$ tai $x = -y$. Jos nyt valitaan $A = \mathbb{R}$ ja $B = [0, \infty)$, saadaan funktio $f(x) = \sqrt{x^2}$.

Esimerkki

Määritellään

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{jos } x < 0 \\ x, & \text{jos } x \geq 0. \end{cases}$$

Esimerkki

Määritellään

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{jos } x < 0 \\ x, & \text{jos } x \geq 0. \end{cases}$$

Esimerkki

Määritellään *signum*-funktio ehdoilla

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{jos } x < 0 \\ 0 & \text{jos } x = 0 \\ 1, & \text{jos } x > 0. \end{cases}$$

Rationaaliset operaatiot

- Vakiolla kertominen

Rationaaliset operaatiot

- Vakiolla kertominen
- Yhteen- ja vähennyslasku

Rationaaliset operaatiot

- Vakiolla kertominen
- Yhteen- ja vähennyslasku
- Kerto- ja jakolasku

Rationaaliset operaatiot

- Vakiolla kertominen
- Yhteen- ja vähennyslasku
- Kerto- ja jakolasku

Rationaaliset operaatiot

- Vakiolla kertominen
- Yhteen- ja vähennyslasku
- Kerto- ja jakolasku

Määritelmä

Alkeisfunktioita ovat sekä algebralliset funktiot, että eksponentti- ja logaritmifunktiot, sekä trigonometriset funktiot ja näiden käänteisfunktiot, sekä edellä mainituista yhdistämällä ja rationaalisin operaatioin saadut funktiot.

Esitysmuotoja (yksikköympyrä)

- Implisiittimuoto $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, x \in [-1, 1]$
- Eksplisiittimuoto $y = \sqrt{1 - x^2}$
- Parametrimuoto $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$

Esitysmuotoja (yksikköympyrä)

- Implisiittimuoto $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, x \in [-1, 1]$
- Eksplisiittimuoto $y = \sqrt{1 - x^2}$
- Parametrimuoto $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$

Itseisarvo

- Eksplisiittimuoto: $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$

Esitysmuotoja (yksikköympyrä)

- Implisiittimuoto $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, x \in [-1, 1]$
- Eksplisiittimuoto $y = \sqrt{1 - x^2}$
- Parametrimuoto $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$

Itseisarvo

- Eksplisiittimuoto: $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$
- Implisiittimuoto: $x^2 - y^2 = 0, y \geq 0.$

Esitysmuotoja (yksikköympyrä)

- Implisiittimuoto $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, x \in [-1, 1]$
- Eksplisiittimuoto $y = \sqrt{1 - x^2}$
- Parametrimuoto $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$

Itseisarvo

- Eksplisiittimuoto: $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$
- Implisiittimuoto: $x^2 - y^2 = 0, y \geq 0.$
- Parametrimuoto: $\{(t, \operatorname{sgn}(t)t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$. Laajennus: $\mathbb{R}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$. Laajennus: $\mathbb{R}$.
- Yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$. Laajennus: $\mathbb{R}$.
- Yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$. Laajennus: $\mathbb{C}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$. Laajennus: $\mathbb{R}$.
- Yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$. Laajennus: $\mathbb{C}$.

Esimerkki

Toisen asteen polynomi yhtälön

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$(a \neq 0)$ ratkaiseminen

"Määritelmä"

"Määritelmä"

- Imaginaariyksikkö i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$.

"Määritelmä"

- Imaginaariyksikkö i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$.
- Kompleksiluku z on muotoa $z = x + yi$ oleva lauseke, missä x ja $y \in \mathbb{R}$.

"Määritelmä"

- Imaginaariyksikkö i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$.
- Kompleksiluku z on muotoa $z = x + yi$ oleva lauseke, missä x ja $y \in \mathbb{R}$.
- Kompleksiluvut $z_1 = x_1 + y_1i$ ja $z_2 = x_2 + y_2i$ ovat yhtäsuuret tarkalleen silloin kun $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$.

"Määritelmä"

- Imaginaariyksikkö i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$.
- Kompleksiluku z on muotoa $z = x + yi$ oleva lauseke, missä x ja $y \in \mathbb{R}$.
- Kompleksiluvut $z_1 = x_1 + y_1i$ ja $z_2 = x_2 + y_2i$ ovat yhtäsuuret tarkalleen silloin kun $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$.
- Jos $y = 0$, on $z = x + yi = x \in \mathbb{R}$.

"Määritelmä"

- Imaginaariyksikkö i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$.
- Kompleksiluku z on muotoa $z = x + yi$ oleva lauseke, missä x ja $y \in \mathbb{R}$.
- Kompleksiluvut $z_1 = x_1 + y_1i$ ja $z_2 = x_2 + y_2i$ ovat yhtäsuuret tarkalleen silloin kun $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$.
- Jos $y = 0$, on $z = x + yi = x \in \mathbb{R}$.

Huomautus

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x, y) = x + yi$ on bijektio.

Yhteenlasku ja kertolasku

Yhteenlasku ja kertolasku

- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$

Yhteenlasku ja kertolasku

- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- $(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i.$

Yhteenlasku ja kertolasku

- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- $(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$.
- Kompleksiluvut ns. toteuttavat kunta-aksioomat

Yhteenlasku ja kertolasku

- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- $(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$.
- Kompleksiluvut ns. toteuttavat kunta-aksioomat

Määritelmä

Kompleksiluvun $z = x + yi$ *reaaliosa* määritellään $\operatorname{Re}(z) = x$ ja *imaginaariosa* $\operatorname{Im}(z) = y$

Yhteenlasku ja kertolasku

- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$
- $(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$.
- Kompleksiluvut ns. toteuttavat kunta-aksioomat

Määritelmä

Kompleksiluvun $z = x + yi$ *reaaliosa* määritellään $\operatorname{Re}(z) = x$ ja *imaginaariosa* $\operatorname{Im}(z) = y$

Liittoluku

Kompleksiluvun $z = x + yi$ liittoluku eli kompleksikonjugaatti on $\bar{z} = x - yi$.

Lause

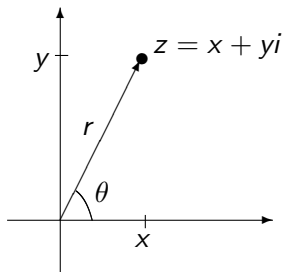
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{ja} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

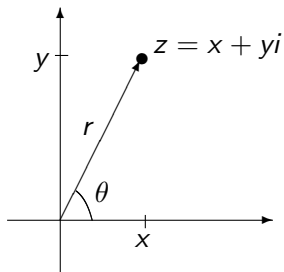
Lause

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{ja} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Kompleksilukujen osamäärä

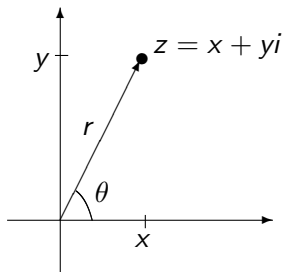
$$\begin{aligned} \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} &= \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + x_2 y_1 i - x_1 y_2 i}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i. \end{aligned}$$





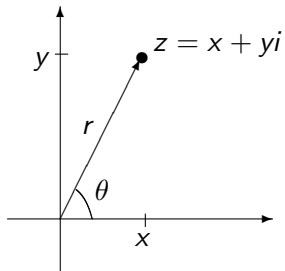
Kaksi esitystä

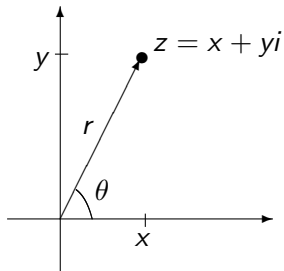
- xy -esitys (tai Re-Im) -esitys: reaaliosa x ja imaginaariosa y



Kaksi esitystä

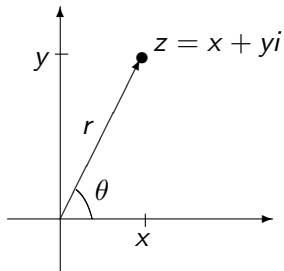
- xy -esitys (tai Re-Im) -esitys: reaali-osa x ja imaginaari-osa y
- Polaari- eli napakoordinaattiesitys: Etäisyys origosta r ja vaihekulma θ .





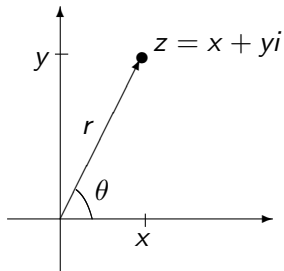
Itseisarvo ja vaihekulma

- $r = |z| \stackrel{\text{Määr.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$



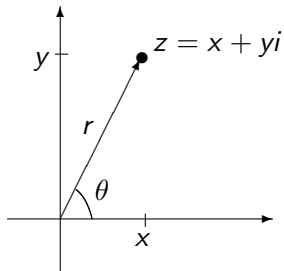
Itseisarvo ja vaihekulma

- $r = |z| \stackrel{\text{Määr.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$



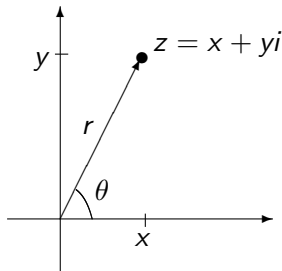
Itseisarvo ja vaihekulma

- $r = |z| \stackrel{\text{Määr.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$
- $\tan \theta = \frac{y}{x}.$



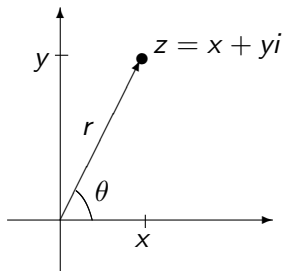
Itseisarvo ja vaihekulma

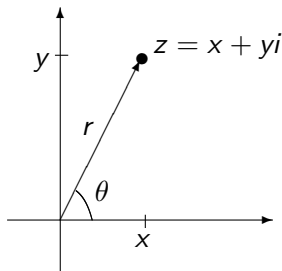
- $r = |z| \stackrel{\text{Määr.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$
- $\tan \theta = \frac{y}{x}$. Jos $x = 0$, valitaan $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2}, & \text{kun } y > 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} & \text{kun } y < 0. \end{cases}$



Itseisarvo ja vaihekulma

- $r = |z| \stackrel{\text{Määr.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$
- $\tan \theta = \frac{y}{x}$. Jos $x = 0$, valitaan $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2}, & \text{kun } y > 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} & \text{kun } y < 0. \end{cases}$
- Vaihekulma voidaan valita $\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{jos } x > 0. \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$





Polaariesitys I ($r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

joten

$$z = x + yi = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$



Leonhard Euler (1707–1783)

Eulerin kaava

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

($e = 2,718281828459045\dots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Eulerin kaava

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

($e = 2,718281828459045 \dots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Esimerkki

- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$

Eulerin kaava

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

($e = 2,718281828459045\dots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Esimerkki

- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$

Eulerin kaava

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

($e = 2,718281828459045\dots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Esimerkki

- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$
- $e^{i \cdot n\pi} = \cos(n\pi) + i \sin(n\pi)$

Eulerin kaava

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

($e = 2,718281828459045\dots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Esimerkki

- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$
- $e^{i \cdot n\pi} = \cos(n\pi) + i \sin(n\pi) = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}$

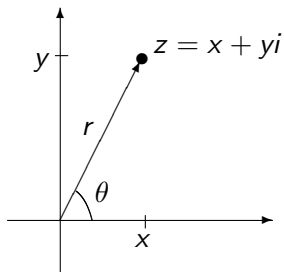
Eulerin kaava

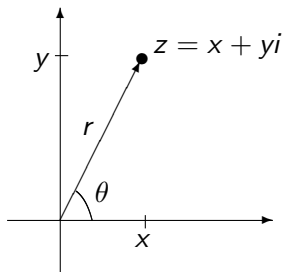
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

($e = 2,718281828459045\dots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Esimerkki

- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$
- $e^{i \cdot n\pi} = \cos(n\pi) + i \sin(n\pi) = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}$
- $e^{2\pi i n} = (-1)^{2n} = 1, n \in \mathbb{Z}.$





Polaariesitys II ($e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

joten

$$z = x + yi = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

Huomautus

Jos $\theta \in \mathbb{R}$, on

$$\left| e^{i\theta} \right| = |\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

ja siis polaariesityksessä $z = re^{i\theta}$ on $r = |z|$.

Huomautus

Jos $\theta \in \mathbb{R}$, on

$$\left| e^{i\theta} \right| = |\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

ja siis polaariesityksessä $z = re^{i\theta}$ on $r = |z|$.

Huomautus

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = \cos(\theta + 2\pi n) + i \sin(\theta + 2\pi n) = e^{i(\theta + 2\pi n)}$$

Huomautus

Jos $\theta \in \mathbb{R}$, on

$$\left| e^{i\theta} \right| = |\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

ja siis polaariesityksessä $z = re^{i\theta}$ on $r = |z|$.

Huomautus

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = \cos(\theta + 2\pi n) + i \sin(\theta + 2\pi n) = e^{i(\theta + 2\pi n)}$$

Seuraus

$$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta + 2\pi n)},$$

siis polaariesitys ei ole koskaan yksikäsitteinen, vaan vaihekulmaan θ voidaan aina lisätä mikä hyvänsä täyden ympyrän monikerta.

Lause

Jos $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, on $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Kertolaskun tulkinta

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, missä $r_1 = |z_1|$ ja $r_2 = |z_2|$. Tällöin

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Lause

Jos $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, on $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Kertolaskun tulkinta

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, missä $r_1 = |z_1|$ ja $r_2 = |z_2|$. Tällöin

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

"itseisarvot kerrotaan ja vaihekulmat lisätään"

de Moivren Kaava

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Eulerin kaava $\Rightarrow$ Trigonometrian kaavoja

- Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Eulerin kaava $\Rightarrow$ Trigonometrian kaavoja

- Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- $(e^{ix})^2 = e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$

Eulerin kaava $\Rightarrow$ Trigonometrian kaavoja

- Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- $(e^{ix})^2 = e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$
- $(e^{ix})^2 = (\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + i2 \cos x \sin x$

Eulerin kaava $\Rightarrow$ Trigonometrian kaavoja

- Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- $(e^{ix})^2 = e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$
- $(e^{ix})^2 = (\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + i2 \cos x \sin x$

Vertaamalla reaali- ja imaginaariosia saadaan
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ja $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$

Kompleksinen eksponenttifunktio

Kompleksiluvulle $z = x + iy$ määritellään Eulerin kaavaa noudattaen

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Kompleksinen eksponenttifunktio

Kompleksiluvulle $z = x + iy$ määritellään Eulerin kaavaa noudattaen

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Huomautus

Jos $n \in \mathbb{Z}$, on

$$e^{z+2\pi in} = e^z e^{2\pi in} = e^z,$$

eikä eksponenttifunktio $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ siten ole injektio.

Huomautuksia

Huomautuksia

- Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ arvojoukko on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, eikä f siis ole myöskään surjektio.

Huomautuksia

- Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ arvojoukko on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, eikä f siis ole myöskään surjektio.
- Käänteisrelaatio $f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ei ole funktio: Nollalla ei ole yhtään kuvaa ja kaikilla muilla $z \in \mathbb{C}$ on äärettömän monta kuvaa.

Huomautuksia

- Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ arvojoukko on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, eikä f siis ole myöskään surjektio.
- Käänteisrelaatio $f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ei ole funktio: Nollalla ei ole yhtään kuvaa ja kaikilla muilla $z \in \mathbb{C}$ on äärettömän monta kuvaa.
- Funktio $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = e^z$ on surjektio mutta ei injektio.

Huomautuksia

- Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ arvojoukko on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, eikä f siis ole myöskään surjektio.
- Käänteisrelaatio $f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ei ole funktio: Nollalla ei ole yhtään kuvaa ja kaikilla muilla $z \in \mathbb{C}$ on äärettömän monta kuvaa.
- Funktio $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = e^z$ on surjektio mutta ei injektio. Määritellään kompleksinen logaritmi tämän funktion käänteisrelaationa.

Huomautuksia

- Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ arvojoukko on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, eikä f siis ole myöskään surjektio.
- Käänteisrelaatio $f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ei ole funktio: Nollalla ei ole yhtään kuvaa ja kaikilla muilla $z \in \mathbb{C}$ on äärettömän monta kuvaa.
- Funktio $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = e^z$ on surjektio mutta ei injektio. Määritellään kompleksinen logaritmi tämän funktion käänteisrelaationa.
- Analogia: Jos $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}$ ja $x = re^{\theta}$, niin $\ln x = \ln(re^{\theta}) = \ln r + \ln e^{\theta} = \ln r + \theta$.

Kompleksinen logaritmi

Kompleksiluvun $z \neq 0$ logaritmi saadaan polaariesityksen avulla: Olkoon z :n polaariesitys $z = |z| e^{i\theta} = |z| e^{i(\theta+2\pi n)}$. Tällöin kompleksinen logaritmi määritellään

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i(\theta + 2\pi n),$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

Kompleksinen logaritmi

Kompleksiluvun $z \neq 0$ logaritmi saadaan polaariesityksen avulla: Olkoon z :n polaariesitys $z = |z| e^{i\theta} = |z| e^{i(\theta+2\pi n)}$. Tällöin kompleksinen logaritmi määritellään

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i(\theta + 2\pi n),$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

Huomautus

$\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ tarkoittaa kompleksista e -kantaista logaritmia, $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tavallista reaaliluvuilla määriteltyä e -kantaista logaritmia.

Määritelmä

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i(\theta + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Määritelmä

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i(\theta + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Määritelmän ongelmia

- Määritelmän oikea puoli on ääretön joukko kompleksilukuja. Joskus käytetään joukkosulkeita.

Määritelmä

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i(\theta + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Määritelmän ongelmia

- Määritelmän oikea puoli on ääretön joukko kompleksilukuja. Joskus käytetään joukkosulkeita.
- Oikea määritelmä: Kaikille $n \in \mathbb{Z}$ relaationuoli

$$z \xrightarrow{\operatorname{Log}} \ln |z| + i(\theta + 2\pi n).$$

Määritelmä

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i(\theta + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Määritelmän ongelmia

- Määritelmän oikea puoli on ääretön joukko kompleksilukuja. Joskus käytetään joukkosulkeita.
- Oikea määritelmä: Kaikille $n \in \mathbb{Z}$ relaationuoli

$$z \xrightarrow{\operatorname{Log}} \ln |z| + i(\theta + 2\pi n).$$

- Kurssille valittu määritelmä tasapainotettu perinteen ja johdonmukaisuuden välillä.

Tulkintamahdollisuuksia

- Käsitetään logaritmi funktiona $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow 2^{\mathbb{C}}$. Joukko $\{z\}$ ja luku z samaistetaan. Voidaan käyttää tällä kurssilla.

Tulkintamahdollisuuksia

- Käsitetään logaritmi funktiona $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow 2^{\mathbb{C}}$. Joukko $\{z\}$ ja luku z samaistetaan. Voidaan käyttää tällä kurssilla.
- Logaritmin maalijoukon laajentaminen, jolloin saadaan funktio. Edellyttää kompleksitason "monistamista" äärettömän moneksi kopioksi ja niiden sopivaa yhteenliittämistä (ns. Riemannin pinnat). Ei käsitellä tällä kurssilla.

Tulkintamahdollisuuksia

- Käsitetään logaritmi funktiona $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow 2^{\mathbb{C}}$. Joukko $\{z\}$ ja luku z samaistetaan. Voidaan käyttää tällä kurssilla.
- Logaritmin maalijoukon laajentaminen, jolloin saadaan funktio. Edellyttää kompleksitason "monistamista" äärettömän moneksi kopioksi ja niiden sopivaa yhteenliittämistä (ns. Riemannin pinnat). Ei käsitellä tällä kurssilla.
- Vaihekulman rajoittaminen yksikäsitteisyyden saavuttamiseksi (ns. päähaara). Voidaan käyttää tällä kurssilla.

Esimerkki

- $\text{Log}(-2)$?

Esimerkki

- $\text{Log}(-2)$?
- Luvun -2 polaariesitys ?

Esimerkki

- $\text{Log}(-2)$?
- Luvun -2 polaariesitys ?
- $|-2| = 2$, vaihekulma π

Esimerkki

- $\text{Log}(-2)$?
- Luvun -2 polaariesitys ?
- $|-2| = 2$, vaihekulma π
- $-2 = 2 \cdot e^{i\pi} = 2e^{i(\pi+2\pi n)}$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Esimerkki

- $\text{Log}(-2)$?
- Luvun -2 polaariesitys ?
- $|-2| = 2$, vaihekulma π
- $-2 = 2 \cdot e^{i\pi} = 2e^{i(\pi+2\pi n)}$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $\text{Log}(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi n)$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Esimerkki

- $\text{Log } i$?

Esimerkki

- $\text{Log } i$?
- Luvun i polaariesitys ?

Esimerkki

- $\text{Log } i$?
- Luvun i polaariesitys ?
- $|i| = 1$, vaihekulma $\frac{\pi}{2}$

Esimerkki

- $\text{Log } i$?
- Luvun i polaariesitys ?
- $|i| = 1$, vaihekulma $\frac{\pi}{2}$
- $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)}$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Esimerkki

- $\text{Log } i$?
- Luvun i polaariesitys ?
- $|i| = 1$, vaihekulma $\frac{\pi}{2}$
- $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)}$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $\text{Log } i = i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Logaritmin päähaara

Logaritmin *päähaara* $\overline{\text{Log}}$ on logaritmirelaation

$$z \xrightarrow{\text{Log}} \ln |z| + i(\theta + n \cdot 2\pi)$$

se kuva

$$\overline{\text{Log}} z = \ln |z| + i(\theta + 2n_1\pi),$$

jolle pätee $\theta + 2n_1\pi \in (-\pi, \pi]$.

Logaritmin päähaara

Logaritmin *päähaara* $\overline{\text{Log}}$ on logaritmirelaation

$$z \xrightarrow{\text{Log}} \ln |z| + i(\theta + n \cdot 2\pi)$$

se kuva

$$\overline{\text{Log}} z = \ln |z| + i(\theta + 2n_1\pi),$$

jolle pätee $\theta + 2n_1\pi \in (-\pi, \pi]$.

Esimerkki

$$\text{Log}(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi n),$$

Logaritmin päähaara

Logaritmin *päähaara* $\overline{\text{Log}}$ on logaritmirelaation

$$z \xrightarrow{\text{Log}} \ln |z| + i(\theta + n \cdot 2\pi)$$

se kuva

$$\overline{\text{Log}} z = \ln |z| + i(\theta + 2n_1\pi),$$

jolle pätee $\theta + 2n_1\pi \in (-\pi, \pi]$.

Esimerkki

$$\text{Log}(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi n),$$

$$\overline{\text{Log}}(-2) = \ln 2 + i\pi$$

Analogia reaaliluvuilla

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a}$$

Analogia reaaliluvuilla

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a}$$

Määritelmä

Olkoon $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $b \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$a^b = e^{b \operatorname{Log} a}$$

Kompleksinen potenssiinkorotus

Analogia reaaliluvuilla

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a}$$

Määritelmä

Olkoon $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $b \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$a^b = e^{b \operatorname{Log} a}$$

Huomautus

- Koska $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ on relaatio, on myös kompleksinen potenssi relaatio, ts. a^b :llä voi olla useita arvoja.

Analogia reaalityyvuilla

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a}$$

Määritelmä

Olkoon $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $b \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$a^b = e^{b \operatorname{Log} a}$$

Huomautus

- Koska $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ on relaatio, on myös kompleksinen potenssi relaatio, ts. a^b :llä voi olla useita arvoja.
- Myös yksikäsitteinen arvo a^b on mahdollista, sillä eksponenttifunktio voi yhdistää monia arvoja yhdeksi.

Esimerkki

- i^i ?

Esimerkki

- i^i ?
- $i^i = e^{\text{Log } i^i} = e^{i \text{Log } i}$

Esimerkki

- i^i ?
- $i^i = e^{\operatorname{Log} i^i} = e^{i \operatorname{Log} i}$
- $\operatorname{Log} i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Esimerkki

- i^i ?
- $i^i = e^{\operatorname{Log} i^i} = e^{i \operatorname{Log} i}$
- $\operatorname{Log} i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $i \operatorname{Log} i = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Esimerkki

- i^i ?
- $i^i = e^{\operatorname{Log} i^i} = e^{i \operatorname{Log} i}$
- $\operatorname{Log} i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $i \operatorname{Log} i = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $i^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi n} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Esimerkki

- 3^2 ?

Esimerkki

- 3^2 ?
- $3^2 = e^{\text{Log } 3^2} = e^{2 \text{Log } 3}$

Esimerkki

- 3^2 ?
- $3^2 = e^{\operatorname{Log} 3^2} = e^{2 \operatorname{Log} 3}$
- $\operatorname{Log} 3 = \operatorname{Log} 3e^{2\pi in} = \ln 3 + 2\pi in$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Esimerkki

- 3^2 ?
- $3^2 = e^{\operatorname{Log} 3^2} = e^{2 \operatorname{Log} 3}$
- $\operatorname{Log} 3 = \operatorname{Log} 3e^{2\pi in} = \ln 3 + 2\pi in$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $2 \operatorname{Log} 3 = 2 \ln 3 + 4\pi in$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Esimerkki

- 3^2 ?
- $3^2 = e^{\operatorname{Log} 3^2} = e^{2 \operatorname{Log} 3}$
- $\operatorname{Log} 3 = \operatorname{Log} 3e^{2\pi in} = \ln 3 + 2\pi in$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $2 \operatorname{Log} 3 = 2 \ln 3 + 4\pi in$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $3^2 = e^{2 \ln 3 + 4\pi in} = e^{2 \ln 3} e^{4\pi in} = e^{2 \ln 3} = e^{\ln 9} = 9$

Esimerkki

- $8^{\frac{1}{3}}$?

Esimerkki

- $8^{\frac{1}{3}}$?
- $8^{\frac{1}{3}} = e^{\text{Log } 8^{\frac{1}{3}}} = e^{\frac{1}{3} \text{Log } 8}$

Esimerkki

- $8^{\frac{1}{3}}$?
- $8^{\frac{1}{3}} = e^{\operatorname{Log} 8^{\frac{1}{3}}} = e^{\frac{1}{3} \operatorname{Log} 8}$
- $\operatorname{Log} 8 = \operatorname{Log} 8e^{2\pi in} = \ln 8 + 2\pi in$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Esimerkki

- $8^{\frac{1}{3}}$?
- $8^{\frac{1}{3}} = e^{\operatorname{Log} 8^{\frac{1}{3}}} = e^{\frac{1}{3} \operatorname{Log} 8}$
- $\operatorname{Log} 8 = \operatorname{Log} 8e^{2\pi in} = \ln 8 + 2\pi in$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{3} \operatorname{Log} 8 = \frac{1}{3} \ln 8 + \frac{2\pi in}{3}$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Esimerkki

- $8^{\frac{1}{3}}$?
- $8^{\frac{1}{3}} = e^{\operatorname{Log} 8^{\frac{1}{3}}} = e^{\frac{1}{3} \operatorname{Log} 8}$
- $\operatorname{Log} 8 = \operatorname{Log} 8e^{2\pi in} = \ln 8 + 2\pi in$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{3} \operatorname{Log} 8 = \frac{1}{3} \ln 8 + \frac{2\pi in}{3}$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $8^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \ln 8 + \frac{2\pi in}{3}} = e^{\ln 8^{\frac{1}{3}}} e^{\frac{2\pi in}{3}} = 2e^{\frac{2\pi in}{3}}$, missä $n \in \mathbb{Z}$

Esimerkki

- $8^{\frac{1}{3}}$?
- $8^{\frac{1}{3}} = e^{\operatorname{Log} 8^{\frac{1}{3}}} = e^{\frac{1}{3} \operatorname{Log} 8}$
- $\operatorname{Log} 8 = \operatorname{Log} 8e^{2\pi in} = \ln 8 + 2\pi in$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{3} \operatorname{Log} 8 = \frac{1}{3} \ln 8 + \frac{2\pi in}{3}$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $8^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \ln 8 + \frac{2\pi in}{3}} = e^{\ln 8^{\frac{1}{3}}} e^{\frac{2\pi in}{3}} = 2e^{\frac{2\pi in}{3}}$, missä $n \in \mathbb{Z}$
- $8^{\frac{1}{3}} = \{2, 2e^{\frac{2\pi in}{3}}, 2e^{\frac{4\pi in}{3}}\}$

Lause (Potenssin arvojen määrät)

Lause (Potenssin arvojen määrät)

- Jos $b \in \mathbb{N}$, kompleksinen potenssi a^b on yksikäsitteinen ja yhtyy kertolaskun avulla saatuun määritelmään:

$$a^b = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ kpl}}.$$

Yksikäsitteisyys on myös voimassa kaikille $b \in \mathbb{Z}$.

Lause (Potenssin arvojen määrät)

- Jos $b \in \mathbb{N}$, kompleksinen potenssi a^b on yksikäsitteinen ja yhtyy kertolaskun avulla saatuun määritelmään:

$$a^b = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ kpl}}.$$

Yksikäsitteisyys on myös voimassa kaikille $b \in \mathbb{Z}$.

- Jos $b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ on supistetussa muodossa, on kompleksisella potenssilla a^b q eri arvoa, jotka saadaan yhdestä arvosta kertomalla luvuilla $e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{q}}$, $n \in \{0, 1, \dots, q-1\}$.

Lause (Potenssin arvojen määrät)

- Jos $b \in \mathbb{N}$, kompleksinen potenssi a^b on yksikäsitteinen ja yhtyy kertolaskun avulla saatuun määritelmään:

$$a^b = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ kpl}}.$$

Yksikäsitteisyys on myös voimassa kaikille $b \in \mathbb{Z}$.

- Jos $b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ on supistetussa muodossa, on kompleksisella potenssilla a^b q eri arvoa, jotka saadaan yhdestä arvosta kertomalla luvuilla $e^{\frac{n \cdot 2\pi i}{q}}$, $n \in \{0, 1, \dots, q-1\}$.
- Jos $b \notin \mathbb{Q}$, on kompleksisella potenssilla a^b äärettömän monta eri arvoa, jotka saadaan yhdestä arvosta kertomalla luvuilla $e^{b \cdot n \cdot 2\pi i}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Määritelmä

Potenssin a^b pääarvo (tai päähaaran arvo) on $e^{b\overline{\text{Log}} a}$.

Määritelmä

n :nnet ykkösenjuuret ovat potenssin $1^{\frac{1}{n}}$ kaikki arvot

$$1^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Log} 1} = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Log} e^{2\pi i k}} = e^{\frac{2\pi i k}{n}},$$

missä $k \in \mathbb{Z}$. Nämä ovat yhtälön $z^n = 1$ ratkaisut.

Ykkösenjuuret

Koska $e^{2\pi i} = 1$, on

$$1^{\frac{1}{n}} = \{e^{0 \cdot \frac{2\pi i}{n}} = 1, e^{1 \cdot \frac{2\pi i}{n}}, e^{2 \cdot \frac{2\pi i}{n}}, \dots, e^{(n-1) \cdot \frac{2\pi i}{n}}\}.$$

Ykkösenjuuret

Koska $e^{2\pi i} = 1$, on

$$1^{\frac{1}{n}} = \{e^{0 \cdot \frac{2\pi i}{n}} = 1, e^{1 \cdot \frac{2\pi i}{n}}, e^{2 \cdot \frac{2\pi i}{n}}, \dots, e^{(n-1) \cdot \frac{2\pi i}{n}}\}.$$

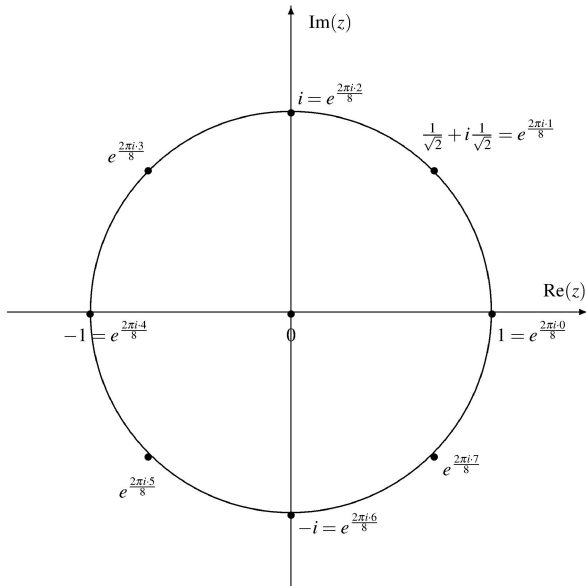
Toisin ilmaistuna:

n :nsien ykkösenjuurten itseisarvo on 1 ja vaihekulmat ovat

$$0 \cdot \frac{2\pi}{n}, 1 \cdot \frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1) \frac{2\pi}{n}.$$

$\frac{2\pi}{n}$ on n :s osa täydestä ympyrästä.

Kompleksinen potenssiinkorotus: $z^8 = 1$ ratkaisut



Eulerin kaava

- $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Eulerin kaava

- $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
- $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$

Yhteenlasku ja vähennyslasku tuottaa seuraavat määritelmät:

Eulerin kaava

- $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
- $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$

Yhteenlasku ja vähennyslasku tuottaa seuraavat määritelmät:

Sini ja kosini

- $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$
- $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

Eulerin kaava

- $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
- $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$

Yhteenlasku ja vähennyslasku tuottaa seuraavat määritelmät:

Sini ja kosini

- $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$
- $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$
- Näin määritellen Eulerin kaava pätee myös kompleksiluvuille

Lukujoukon laajennus

- Yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ ei ole ratkaisua $\mathbb{R}$:ssä, mutta $\mathbb{C}$:ssä kaksi ratkaisua $\pm i$.

Lukujoukon laajennus

- Yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ ei ole ratkaisua $\mathbb{R}$:ssä, mutta $\mathbb{C}$:ssä kaksi ratkaisua $\pm i$.
- Esimerkki: Yhtälöllä $x^2 - 2x + 5 = 0$ on kaksi kompleksista ratkaisua $1 \pm 2i$.

Lukujoukon laajennus

- Yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ ei ole ratkaisua $\mathbb{R}$:ssä, mutta $\mathbb{C}$:ssä kaksi ratkaisua $\pm i$.
- Esimerkki: Yhtälöllä $x^2 - 2x + 5 = 0$ on kaksi kompleksista ratkaisua $1 \pm 2i$.
- Entä kaikki muut polynomiyhtälöt
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0?$$

Lukujoukon laajennus

- Yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ ei ole ratkaisua $\mathbb{R}$:ssä, mutta $\mathbb{C}$:ssä kaksi ratkaisua $\pm i$.
- Esimerkki: Yhtälöllä $x^2 - 2x + 5 = 0$ on kaksi kompleksista ratkaisua $1 \pm 2i$.
- Entä kaikki muut polynomiyhtälöt
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0?$$

Määritelmä

Muuttujan z kompleksikertoimisten polynomien joukosta käytetään merkintää $\mathbb{C}[z]$. Vastaavat merkinnät reaali- ja kokonaislukukertoimisista polynomeista ovat $\mathbb{R}[z]$ ja $\mathbb{Z}[x]$.

Algebran peruslause

Olkoon $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 \in \mathbb{C}[z]$. Jos $P(z)$ ei ole vakiopolynomi $c_0 \neq 0$, on polynomiyhtälöllä

$$P(z) = 0$$

ratkaisu joukossa $\mathbb{C}$.

Algebran peruslause

Olkoon $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 \in \mathbb{C}[z]$. Jos $P(z)$ ei ole vakiopolynomi $c_0 \neq 0$, on polynomiyhtälöllä

$$P(z) = 0$$

ratkaisu joukossa $\mathbb{C}$.

Huomautus

Algebran peruslauseesta ei kuitenkaan seuraa että polynomin nollakohta voitaisiin löytää helposti polynomin kertoimista, kuten esim. 2. asteen tapauksessa.

Niels Henrik Abel 1824:

Astetta ≥ 5 olevien polynomien nollakohtia ei yleisesti voida esittää polynomin kertoimista rakennettuna juuri- ja rationaalifunktioiden yhdistelmänä.

Niels Henrik Abel 1824:

Astetta ≥ 5 olevien polynomien nollakohtia ei yleisesti voida esittää polynomin kertoimista rakennettuna juuri- ja rationaalifunktioiden yhdistelmänä.

Toisin sanoen: Ei ole olemassa juuri- ja rationaalifunktioihin perustuvaa "ratkaisukaavaa" jos polynomin aste on ≥ 5 .