

Insinöörimatematiikka: Matematiikan perustiedot

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Eksponenttifunktiot

Kun $a \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{N}$, määritellään

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

Selvästi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{ja} \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Miten pitää määritellä a^0 ?

$$a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0.$$

Tästä seuraa, että $a^0 = 1$.

Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä a^{-n} , kun $n \in \mathbb{N}$?

$$1 = a^0 = a^{-n+n} = a^{-n}a^n,$$

josta

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}.$$

EkspONENTTIFUNKTIOT

Miten pitää määritellä a^r , kun $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$?

Pitäisi olla

$$(a^r)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

Määritelmä

Olkoon $b > 0$. Luvun b n :s juuri on positiivinen reaaliluku β , joka toteuttaa yhtälön $\beta^n = b$. Tätä merkitään symbolilla $\beta = \sqrt[n]{b}$.

Edellämainitun perusteella pitää määritellä

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

(Mieti mistä viimeisin yhtäsuuruus johtuu)

Eksponenttifunktio

Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, miten a^x pitää määritellä? On mahdollista valita rationaalilukujono $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots$ jolle $x = \sup\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ ja määritellä $a^x = \sup\{a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots\}$

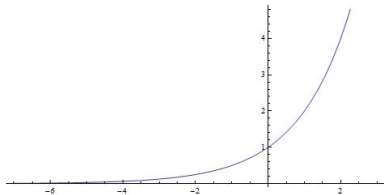
Eksponenttifunktio

Edellä kuvatulla menettelyllä voidaan määritellä funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = a^x$

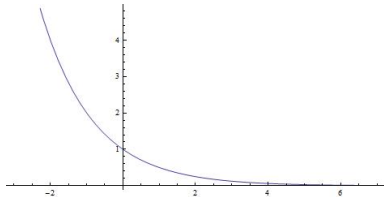
Ominaisuuksia

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- Jos $0 < a < 1$, on f aidosti vähenevä ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x kasvaa rajatta mutta kasvavat rajatta kun x pienenee rajatta
- Arvoilla $a > 1$ f on aidosti kasvava ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x pienenee rajatta ja f :n arvot kasvavat rajatta kun x kasvaa rajatta
- Molemmissa tapauksissa bijektio.
- Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$

$$y = 2^x$$



$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



Logaritmi

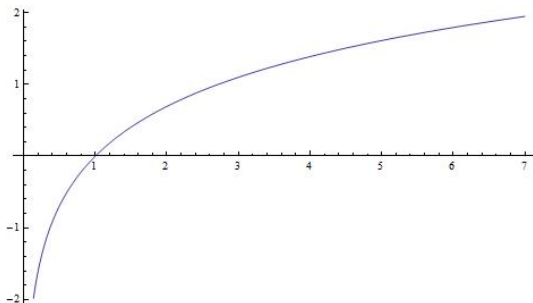
Logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Logaritmifunktio toteuttaa ehdot

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$.
- Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$ ja siis
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{c}$

$$y = \ln x = \log_e x, \quad e = 2,71828182845904523536 \dots$$



Esimerkki

Kuinka suureksi x pitää valita, että $2^x > 10^9$?

Koska eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ on aidosti kasvava ja $\log_2$ tämän käänteisfunktiona niinkään aidosti kasvava, voidaan epäyhtälöstä päätellä $\log_2(2^x) > \log_2(10^9)$, mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$x > 9 \log_2(10) = 29.897 \dots$$

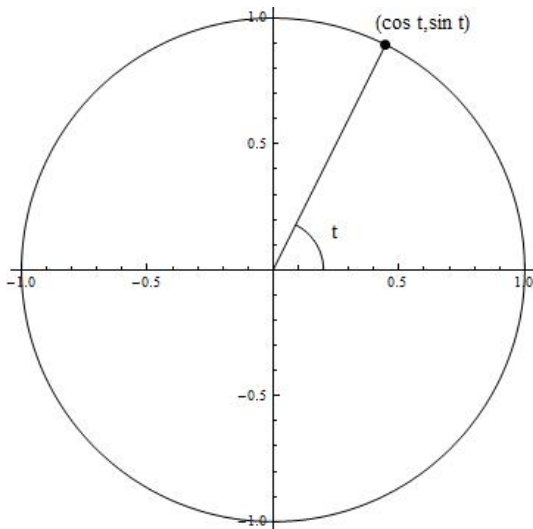
"Määritelmä"

Ympyräsektorin kulman suuruus on sektorin kaaren pituus jaettuna säteen pituudella. Tällöin kulma x (asteissa) voidaan muuntaa kulmaksi y (radiaaneissa) seuraavasti: $y = \frac{\pi}{180}x$. Suoran kulman suuruus on siis $\frac{\pi}{2}$, oikokulman π ja täyden ympyrän 2π .

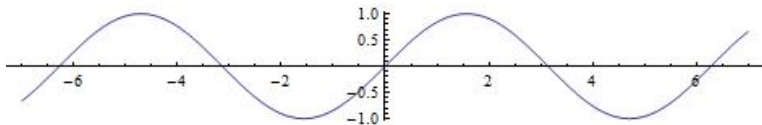
"Määritelmä"

Kulman, joka kiertyy positiiviselta x -akselilta myötäpäivään *kehäpiste* on origokeskisen yksikköympyrän ja kulman vasemman kyljen leikkauspiste. Tämän kulman *sini* on kehäpisteen y -koordinaatti ja *kosini* x -koordinaatti.

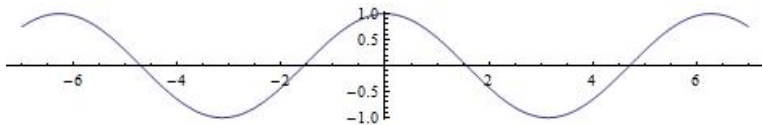
Trigonometriset funktiot



Trigonometriset funktiot



$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Trigonometriset funktiot

Jaksollisuus

$$\sin x = \sin(x + 2\pi n) \quad \text{ja} \quad \cos x = \cos(x + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

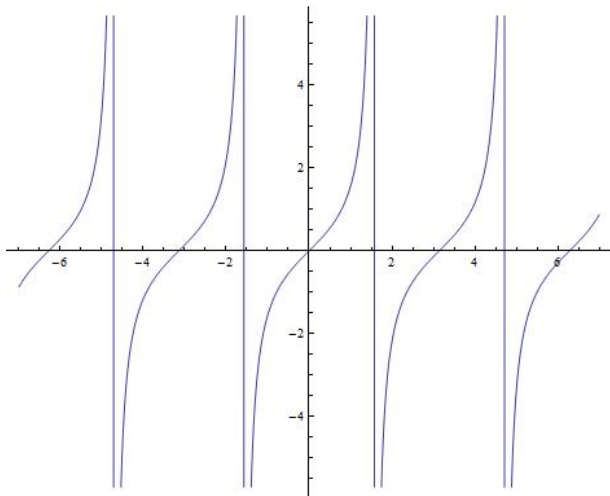
Nollakohdat

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Trigonometriset kaavat

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, jne.

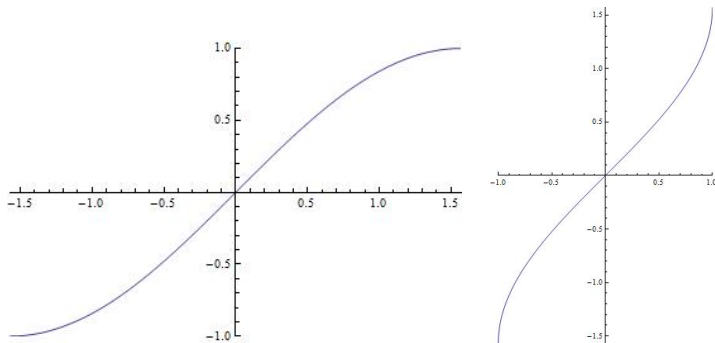
Trigonometriset funktiot



$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Trigonometriset funktiot

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1] \quad \sin^{-1} : [0, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Käänteisfunktiot

- Funktion $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ käänteisfunktio on nimeltään *arkussini*, merkitään $\arcsin$ tai $\sin^{-1}$.
- Funktion $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ käänteisfunktio on nimeltään *arkuskosini*, merkitään $\arccos$ tai $\cos^{-1}$.
- Funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ käänteisfunktio on nimeltään *arkustangentti*, merkitään $\arctan$ tai $\tan^{-1}$.

Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $|\sin x| \leq |x|$
- $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &= \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \cdot 1 \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y|, \end{aligned}$$

siis $d(\sin x, \sin y) \leq d(x, y)$. Samoin $d(\cos x, \cos y) \leq d(x, y)$.

Kahden muuttujan polynomi yhtälö $P(x, y) = 0$ saattaa määritellä funktion $f : A \rightarrow B$, $y = f(x)$ kunhan joukot A ja B valitaan sopivasti. Tällaisia funktioita sanotaan *algebrallisiksi*. Tällöin siis x on alkukuva ja y on kuva.

Esimerkki

Polynomi yhtälö $x^2 + y^2 - 1 = 0$ määrittelee yksikköympyrän. Mikäli valitaan $A = [-1, 1]$ ja $B = [0, \infty)$, saadaan aikaan funktio $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Esimerkki

Polynomi yhtälö $x^2 - y^2 = 0$ voidaan kirjoittaa muotoon $(x - y)(x + y) = 0$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $x = y$ tai $x = -y$. Jos nyt valitaan $A = \mathbb{R}$ ja $B = [0, \infty)$, saadaan funktio $f(x) = \sqrt{x^2}$.

Esimerkki

Määritellään

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{jos } x < 0 \\ x, & \text{jos } x \geq 0. \end{cases}$$

Esimerkki

Määritellään *signum*-funktio ehdoilla

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{jos } x < 0 \\ 0 & \text{jos } x = 0 \\ 1, & \text{jos } x > 0. \end{cases}$$

Rationaaliset operaatiot

- Vakiolla kertominen
- Yhteen- ja vähennyslasku
- Kerto- ja jakolasku

Määritelmä

Alkeisfunktioita ovat sekä algebralliset funktiot, että eksponentti- ja logaritmifunktiot, sekä trigonometriset funktiot ja näiden käänteisfunktiot, sekä edellä mainituista yhdistämällä ja rationaalisin operaatioin saadut funktiot.

Esitysmuotoja (yksikköympyrä)

- Implisiittimuoto $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, x \in [-1, 1]$
- Eksplisiittimuoto $y = \sqrt{1 - x^2}$
- Parametrimuoto $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$

Itseisarvo

- Eksplisiittimuoto: $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$
- Implisiittimuoto: $x^2 - y^2 = 0, y \geq 0.$
- Parametrimuoto: $\{(t, \operatorname{sgn}(t)t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$. Laajennus: $\mathbb{R}$.
- Yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$. Laajennus: $\mathbb{C}$.

Esimerkki

Toisen asteen polynomi yhtälön

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$(a \neq 0)$ ratkaiseminen

"Määritelmä"

- Imaginaariyksikkö i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$.
- Kompleksiluku z on muotoa $z = x + yi$ oleva lauseke, missä x ja $y \in \mathbb{R}$.
- Kompleksiluvut $z_1 = x_1 + y_1i$ ja $z_2 = x_2 + y_2i$ ovat yhtäsuuret tarkalleen silloin kun $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$.
- Jos $y = 0$, on $z = x + yi = x \in \mathbb{R}$.

Huomautus

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x, y) = x + yi$ on bijektio.

Yhteenlasku ja kertolasku

- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- $(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$.
- Kompleksiluvut ns. toteuttavat kunta-aksioomat

Määritelmä

Kompleksiluvun $z = x + yi$ *reaaliosa* määritellään $\operatorname{Re}(z) = x$ ja *imaginaariosa* $\operatorname{Im}(z) = y$

Liittoluku

Kompleksiluvun $z = x + yi$ liittoluku eli kompleksikonjugaatti on $\bar{z} = x - yi$.