

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Demonstraatio 1, 17.1.2023

1. Mikä on todennäköisyys sille, että kahta tavallista noppaa heittämällä saadaan yhteenlaskettuna pariton silmäluku joka ei ylitä lukua 9?

Mallivastaus: Kahden nopan heitossa on $6 \cdot 6 = 36$ mahdollista tulosta. Näistä tulokset $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(1, 6)$, $(6, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 5)$, $(5, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(4, 5)$ ja $(5, 4)$ ovat sellaisia, joiden yhteenlaskettu silmäluku on pariton eikä ylitä lukua 9. Näitä on yhteensä 16 kpl, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

2. Tikkataulun säde on 20 cm ja sen keskustan säde on 1 cm. Jos heitetty tikka osuu mihin tahansa kohtaan taulua yhtä todennäköisesti, mikä on todennäköisyys osua keskustaan?

Mallivastaus: Kysytty todennäköisyys saadaan pinta-alojen suhteena:

$$\frac{\pi \cdot 1^2}{\pi \cdot 20^2} = \frac{1}{400}.$$

3. Mikä on todennäköisyys sille, että kahta noppaa heittämällä saadaan silmäluvuksi korkeintaan 8, kun tiedetään että silmäluku on parillinen?

Parempi muotoilu ja ohje, lisätty 12.1.: Jos kahden nopan heitossa saadaan pariton silmälukujen summa, jätetään heitto huomiotta ja heitetään uudestaan. Mikä on todennäköisyys sille, että huomioon otetussa heitossa saadaan silmälukujen summaksi korkeintaan 8?

Ohje: käytä otosavaruutena sellaista osajoukkoa, jossa silmälukujen summa on parillinen.

Mallivastaus: Kahden nopan heitossa 36 mahdollista tulosta, joista $36/2 = 18$ antaa parillisen silmälukujen summan. Näistä $(6, 6)$, $(6, 4)$, $(4, 6)$ ja $(5, 5)$ (4 kpl) antavat silmälukujen summaksi yli 8. Näin ollen mahdollisuuksista $18 - 4 = 14$ antaa silmälukujen summaksi korkeintaan 8. Kysytty todennäköisyys on siis

$$\frac{14}{18} = \frac{7}{9}.$$

4. Selvitä miten todennäköisyyden aksiomista seuraa, että $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ ja että $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Ohje: Huomaa että $\Omega = A \cup \overline{A}$ ja että $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Mallivastaus: Koska A ja $\overline{A} = \Omega \setminus A$ ovat toisensa poissulkevat, on

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}).$$

Tästä seuraa suoraan $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Jos sijoitetaan $A = \emptyset$, on $\overline{A} = \Omega$, ja $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ seuraa yllä todetusta.

5. Korttipakassa on 52 korttia. Kuinka monella eri tavalla voidaan pakka järjestää?

Mallivastaus: Erilaisia järjestyksiä on $52! = 52 \cdot 51 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 8,06582 \cdot 10^{67}$

6. Korttipakan korteista neljä on ässiä. Kuinka monella eri tavalla korttipakka voidaan järjestää siten, että kaikki ässät ovat peräkkäin? Ohje: Kuinka monella eri tavalla voidaan järjestää ässät? Entä loput kortit? Entä kuinka monella tavalla voidaan ässät sijoittaa pakkaan peräkkäin?

Mallivastaus: Neljä ässää voidaan järjestää $4! = 24$ eri tavalla ja muut $52 - 4 = 48$ korttia $48!$ eri tavalla. Neljän peräkkäisen ässän rivi voidaan sijoittaa muiden 48 kortin joukkoon 49 eri tavalla, sillä muiden korttien määrä ennen ässäriviä voi olla 0, 1, 2, ..., tai 48. Näin ollen eri järjestysten määrä on

$$4! \cdot 48! \cdot 49 = 1.45988 \cdot 10^{64}.$$

7. Mikä on todennäköisyys sille, että sekoitetussa korttipakassa ässät ovat peräkkäin, kun oletetaan, että kaikki järjestykset ovat yhtä todennäköisiä?

Mallivastaus:

$$\frac{4! \cdot 48! \cdot 49}{52!} = \frac{24}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{1}{5525} = 0,000180995 \dots$$

8. Korissa on 30 palloa, 10 mustaa ja 20 valkoista. Korista nostetaan umpimähkään 9 palloa. Millä todennäköisyydellä saadaan 6 mustaa ja 3 valkoista palloa? Entä 3 mustaa ja 6 valkoista?

Mallivastaus: 1) Tapoja ottaa 10 mustan pallon joukosta 6 on $\binom{10}{6}$ ja 20 valkoisen pallon joukosta 3 on $\binom{20}{3}$. Toisaalta tapoja ylipäänsä valita 9 palloa 30 joukosta on $\binom{30}{9}$. Näiden joukossa ovat tavat valita 6 mustaa ja 3 valkoista, joten kysytty todennäköisyys on

$$\frac{\binom{10}{6} \binom{20}{3}}{\binom{30}{9}} = \frac{1596}{95381} = 0,0167329 \dots$$

2) Samalla tavoin (3 mustaa, 6 valkoista) todennäköisyydeksi saadaan

$$\frac{\binom{10}{3} \binom{20}{6}}{\binom{30}{9}} = \frac{31008}{95381} = 0,325096 \dots$$

9. $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$ ja $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Ovatko tapaukset A ja B toisensa poissulkevat?

Mallivastaus: Toisensa poissulkeville tapauksille $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$, joten

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Nyt kuitenkin $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{3}$, mutta $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, joten A ja B eivät voi olla toisensa poissulkevia.