

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Demonstraatio 2, 24.1.2023

1. Kahden nopan heitossa hylätään silmäluvut joiden summa on suurempi kuin 10 ja heitetään uudelleen. Mikä on todennäköisyys sille, että silmälukujen summana saadaan 3? entä 6?

Mallivastaus: Kyse on ehdollisesta todennäköisyydestä. Kahden nopan heitossa saadaan silmälukujen summaksi S yli 10 vain tapauksissa $(6, 6)$, $(5, 6)$ ja $(6, 5)$. Näin ollen tapoja saada summaksi korkeintaan 10 on $6 \cdot 6 - 3 = 33$. Summaksi voidaan saada 3 seuraavilla tavoilla: $(1, 2)$ ja $(2, 1)$ joten

$$\mathbb{P}(S = 3 \mid S \leq 10) = \frac{2}{33} \approx 0,06.$$

Toisaalta silmälukujen summaksi voidaan saada 6 seuraavilla tavoilla: $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$ (yhteensä 5 kpl), joten

$$\mathbb{P}(S = 6 \mid S \leq 10) = \frac{5}{33} \approx 0,15.$$

Huomautus: Mallivastauksesta käy ilmi, että yritettäessä generoida satunnaisia lukuja joukosta $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ kahta noppaa heittämällä ja sivuuttamalla 10 ylittävät tulokset ei päästä tasaiseen jakaumaan, jossa jokaisen tuloksen todennäköisyys olisi $\frac{1}{10}$

2. Satunnaisbittigeneraattori tuottaa bittejä riippumattomasti. Nolla ilmaantuu todennäköisyydellä p ja ykkönen todennäköisyydellä $q = 1 - p$. Kahden peräkkäisen bitin jono hylätään, jos se on 00 tai 11, ja hyväksytään muutoin. Mikä tällöin on todennäköisyys, että saadaan jono 01?

Mallivastaus: Kyse on ehdollisesta todennäköisyydestä. Jonot 00, 01, 10, 11 saadaan todennäköisyyksillä p^2 , pq , qp ja qq . Todennäköisyys hyväksytylle jonolle on siis

$$\mathbb{P}(01 \cup 10) = \mathbb{P}(01) + \mathbb{P}(10) = pq + qp = 2pq.$$

Ehdollinen todennäköisyys jonolle 01 on siis

$$\frac{\mathbb{P}(01)}{\mathbb{P}(01 \cup 10)} = \frac{pq}{2pq} = \frac{1}{2}.$$

Huomautus: Mallivastauksesta käy ilmi, että epätasaisen (0 ja 1 eri todennäköisyyksillä) satunnaisbittigeneraattorin avulla on mahdollista rakentaa satunnaisbittigeneraattori, jossa 0 ja 1 saadaan molemmat todennäköisyyksillä $\frac{1}{2}$. Tämä saadaan aikaan tulkitsemalla jono 01 nolaksi, 10 ykköseksi ja hylkäämällä jonot 00 ja 11. Edellytyksenä on tietysti riippumattomuus: satunnaisbitin arvo ei saa riippua aiemmin saaduista arvoista.

3. 30% sadepäivistä alkaa pilvisellä aamulla ja 15% kaikista päivistä alkaa pilvisellä aamulla. Kuitenkin vain 10% päivistä on sadepäiviä. Mikä on sateen todennäköisyys jos aamu on pilvinen?

Ohje: Käytä esim. symbolia S merkitsemään sadepäivää ja P merkitsemään pilvistä aamua. Kysytty todennäköisyys on tällöin $\mathbb{P}(S \mid P)$, ja tämän selvittämiseksi voi käyttää Bayesin lausetta.

Mallivastaus: Tiedetään siis että $\mathbb{P}(S) = 0.1$, $\mathbb{P}(P) = 0.15$, ja että $\mathbb{P}(P | S) = 0.3$ ja kysytään todennäköisyyttä $\mathbb{P}(S | P)$.

Bayesin kaavan mukaan

$$\mathbb{P}(S | P) \cdot \mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P | S) \cdot \mathbb{P}(S),$$

josta

$$\mathbb{P}(S | P) = \frac{\mathbb{P}(P | S) \cdot \mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{0.3 \cdot 0.1}{0.15} = 0.2$$

Kysytty todennäköisyys on siis 20%.

4. Millainen esimerkin voit antaa tapahtumista A ja B jotka ovat riippumattomat, mutta eivät toisensa poissulkevat? Entä tapahtumista jotka ovat toisensa poissulkevat, mutta eivät riippumattomat?

Mallivastaus: Esimerkiksi kahden nopan heitossa $A = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6)\}$ (1. noppa 1) ja $B = \{(1, 1), (2, 1), \dots, (6, 1)\}$ (2. noppa 1) toisistaan riippumattomat, sillä $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Nämä eivät kuitenkaan ole toisensa poissulkevat, sillä $A \cap B = \{(1, 1)\} \neq \emptyset$.

Esimerkiksi yhden nopan heitossa tapahtumat $A = \{2, 4, 6\}$ (parillinen silmäluku) ja $B = \{1, 3, 5\}$ (pariton silmäluku) ovat toisensa poissulkevat, siis $A \cap B = \emptyset$, mutta eivät riippumattomat, sillä $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$, mutta $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$.

5. Osoita, että $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Ohje: $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ ja $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$ (miksi?).

Mallivastaus: Joukko-opilliset yhtäsuuruudet osoitetaan **aina** oikeaksi näyttämällä toteen, että joukoilla on samat alkiot. Käytännössä perusteluksi hyväksytään Vennin diagrammi, mutta täsmällisyyden vuoksi tässä esitetään eksakti todistus.

1) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ koska jos $x \in A$ mutta $x \notin B$, on $x \in A \setminus B$. Toisaalta jos $x \in B$, on $x \in A \cap B$. Kummassakin tapauksessa siis x kuuluu jompaan kumpaan oikean puolen joukkoon. Sisältyminen toisin päin on ilmeinen: Jos x kuuluu oikean puolen joukkoon, kuuluu se myös joukkoon A .

2) Leikkausta koskeva väittämä johtuu siitä, että jos $x \in A \cap B$, on $x \in B$ ja tällöin $x \notin A \setminus B$. Samoin jos $x \in A \setminus B$, on $x \notin B$ ja siksi $x \notin A \cap B$.

Ottaen huomioon joukko-opilliset yhtäsuuruudet saadaan

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \setminus B)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B),$$

mistä väittämä seuraa välittömästi.

6. Osoita, että jos A ja B ovat riippumattomat, niin myös A ja $\overline{B}$ ovat riippumattomat. Ohje: $A \cap \overline{B} = A \setminus B$ (miksi?).

Mallivastaus: Joukko-opillisten yhtäsuuruuksien oikeaksi osoittamiseksi hyväksytään Vennin diagrammi, mutta täsmällisyyden vuoksi tässä esitetään eksakti todistus.

$$x \in A \cap \overline{B} \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \setminus B.$$

Tapahtumien A ja $\overline{B}$ riippumattomuus voidaan tällöin osoittaa seuraavasti:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) &= \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}).\end{aligned}$$

7. Painotetun kolikon heitossa saadaan kruuna todennäköisyydellä $\frac{2}{3}$ ja klaava todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$. Millä todennäköisyydellä saadaan klaava vasta kolmannella heitolla?

Mallivastaus: Kysytty todennäköisyys saadaan tulosäännöllä:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27} \approx 15\%$$

8. Olkoot todennäköisyydet kruunalle ja klaavalle samat kuin edellisessä tehtävässä. Mikä on todennäköisyys saada 7 klaavaa, kun kolikkoa heitetään 21 kertaa?

Mallivastaus: Tässä kysytään binomitodennäköisyyttä

$$\binom{21}{7} \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right)^{14} \approx 0.18$$

9. Olkoot todennäköisyydet kruunalle ja klaavalle samat kuin edellisessä tehtävässä. Kolikkoa heitetään kunnes on saatu tasan 7 klaavaa. Mikä on todennäköisyys sille, että tähän tarvitaan 21 heittoa?

Mallivastaus: Tässä kysytään ns. negatiivista binomitodennäköisyyttä. Luen-tojen perusteella tämä on

$$\binom{21-1}{7-1} \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right)^{14} \approx 0.06.$$