

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Demonstraatio 3, 31.1.2023

1. Olkoon X silmälukujen summa kahden nopan heitossa. Laske $\mathbb{E}(X^2)$ ja $\text{Var}(X)$.

Mallivastaus: Luennoilla on aiemmin laskettu silmälukujen summien todennäköisyydet: $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{36}$, $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{36}$, $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{3}{36}$, ..., $\mathbb{P}(X = 12) = \frac{1}{36}$. Näiden perusteella voidaan laskea

$$\mathbb{E}(X^2) = 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + 4^2 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 12^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{329}{6}.$$

Odotusarvo on niinikään laskettu luennolla aiemmin: $\mathbb{E}(X) = 7$, joten

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{35}{6} = 5.833 \dots$$

2. Olkoon X jatkuva satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{50}, & \text{kun } x \in [0, 10] \\ 0, & \text{muutoin} \end{cases}$$

Laske $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ ja $\text{Var}(X)$.

Mallivastaus:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{10} x \cdot \frac{x}{50} dx = \int_0^{10} \frac{x^2}{50} dx = \frac{1}{50} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{10} = \frac{1000}{150} = 20/3 = 6.666 \dots$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{10} x^2 \cdot \frac{x}{50} dx = \int_0^{10} \frac{x^3}{50} dx = \frac{1}{50} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^{10} = \frac{10000}{200} = 50.$$

Näistä saadaan

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 50 - \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{50}{9} = 5.555 \dots$$

3. Painotetulla kolikolla saadaan kruuna 70% ja klaava 30% todennäköisyydellä. Mikä on todennäköisyys että saadaan ainakin kolme kruunaa, kun kolikkoa heitetään 6 kertaa?

Mallivastaus: Kysytty todennäköisyys on

$$\binom{6}{3} 0.7^3 \cdot 0.3^3 + \binom{6}{4} 0.7^4 \cdot 0.3^2 + \binom{6}{5} 0.7^5 \cdot 0.3^1 + \binom{6}{6} 0.7^6 \cdot 0.3^0 = 0.92953 \dots$$

4. Eräällä asuinalueella 90%:lla kotitalouksista on laajakaistayhteys. Mikä on todennäköisyys sille, että kymmenestä kyselyyn valitusta kotitaloudesta vain seitsemällä on laajakaistayhteys?

Mallivastaus:

$$\binom{10}{7} 0.9^7 \cdot 0.1^3 = 0.0573 \dots$$

5. Pankki kirjaa keskimäärin 45 yritystä maksukyvyttömäksi joka vuosi. Käytä Poissonin jakaumaa arvioidaksesi millä todennäköisyydellä pankki kirjaa jonkin kuukauden aikana vähintään 5 yritystä maksukyvyttömäksi.

Mallivastaus: Pankki kirjaa joka kuukausi odotusarvoisesti $\lambda = \frac{45}{12}$ maksukyvyttömäksi. Lasketaan komplemetaarinen todennäköisyys sille, että pankki kirjaa korkeintaan neljä yritystä maksukyvyttömäksi:

$$\mathbb{P}(X < 5) = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} \right) = 0.677548 \dots,$$

josta

$$\mathbb{P}(X \leq 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 0.322452 \dots$$

6. Kaivovettä pidetään juomakelpoisena, mikäli kolibakteereja esiintyy korkeintaan 100 pmy/100 ml.¹ Jos 10 ml näytteestä löytyy 14 pmy kolibakteeria, mikä on todennäköisyys sille, että kaivovesi on juomakelpoista? Käytä Poissonin jakaumaa arviointiin.

Selvennys, lisätty 26.1.: Tehtävässä voidaan selvittää, mikä on todennäköisyys sille että kolibakteereja esiintyy tasan 100 pmy/100 ml.

Mallivastaus: Selvennys on äärimmäisen huonosti muotoiltu ja kannattaa unohtaa. Tarkoitus on määrittää todennäköisyys sille, että äärimmäisessä juomakelpoisessa tapauksessa (kolibakteereja tasan 100 pmy/100 ml) saadaan 10 ml näyte, jossa kolibakteereja on 14 pmy.

Nyt kun tarkastellaan tapausta $\lambda = 10$ pmy, todennäköisyys sille, että kolibakteereja löytyy 14 pmy, on

$$e^{-10} \frac{10^{14}}{14!} = 0.0520771 \dots$$

7. Yrityksen asiakaspalveluun saapuu puhelu keskimäärin joka 8. minuutti, ja puhelujen väliajat noudattavat eksponenttijakaumaa. Määritä parametri v tiheysfunktiolle $f(t) = ve^{-vt}$ kun ajan yksikkönä käytetään minuuttia. Selvitä mikä on Mikä on todennäköisyys sille, että äsken saapuneen puhelun jälkeen seuraava saapuu aikaisintaan 10 minuutin päästä?

Mallivastaus: Parametri $v = \frac{1}{8}$, jolloin

$$\mathbb{P}(T \geq 10) = 1 - \mathbb{P}(T < 10) = 1 - (1 - e^{-v \cdot 10}) = e^{-\frac{10}{8}} = 0.286505 \dots$$

8. Olkoot parametrit kuten edellisessä tehtävässä. Jos aiempi puhelu saapui 4 minuuttia sitten, mikä on todennäköisyys sille, että seuraava saapuu aikaisintaan 12 minuutin päästä?

Mallivastaus: Eksponenttijakauman muistittomuusominaisuuden perusteella

$$\mathbb{P}(T > 12 + 4 \mid T > 4) = \mathbb{P}(T > 12) = e^{-\frac{12}{8}} = 0.22313 \dots$$

9. Pienessä apteekissa on vain kaksi palvelutiskiä. Asiakkaan tullessa apteekkiin molemmilla tiskeillä on jo aiemmin saapunut asiakas, mutta ei muita jonottamassa. Millä todennäköisyydellä viimeksi saapunut asiakas poistuu apteekista myöhemmin kuin molemmat aiemmin tulleet, kun oletetaan, että asiointiaika noudattaa eksponenttijakaumaa?

¹pmy=pesäkettä muodostava yksikkö

Mallivastaus: Viimeksi saapunut asiakas pääsee tiskille kun toinen aiemmin saapuneista postuu ja toinen jää vielä asioimaan. Eksponenttijakauman mukaisella asiointiajalla on muistittomuusominaisuus, joten viimeksi saapuneen asiakkaan palveluajalla on sama eksponenttijakauma kuin aiemmin saapuneella asiakkaalla. Näin ollen kysytty todennäköisyys on $\frac{1}{2}$.

Tarkemmin: Olkoot X ja Y riippumattomat mutta samoin jakautuneet satunnaismuuttujat. Näitä yhdessä käsiteltäessä pitää tarkastella yhteistä todennäköisyystiheyttä $g(x, y)$, joka riippumattomuuden ja X :n ja Y :n saman jakauman perusteella voidaan kirjoittaa muotoon $g(x, y) = f(x)f(y)$. Tämä on sama kuin $g(y, x) = f(y)f(x)$, joten samoin jakautuneet riippumattomat satunnaismuuttujat ovat *vaihdettavissa*, mikä erityisesti merkitsee sitä, että satunnaismuuttujilla $X - Y$ ja $Y - X$ on sama jakauma.

Riippumattomille satunnaismuuttujille on myös helppo todentaa, että $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.

Jos merkitään $D = X - Y$, on siis satunnaismuuttujilla D ja $-D$ sama jakauma. Jatkuvalle satunnaismuuttujalle $\mathbb{P}(D > 0) = \mathbb{P}(D \geq 0)$, joten

$$\mathbb{P}(D > 0) = \mathbb{P}(D \geq 0) = 1 - \mathbb{P}(D < 0) = 1 - \mathbb{P}(-D < 0) = 1 - \mathbb{P}(D > 0).$$

Toiseksi viimeisin yhtäsuuruus perustuu siihen, että satunnaismuuttujilla $D = X - Y$ ja $-D = Y - X$ on sama jakauma. Tästä saadaan yhtälö $2\mathbb{P}(D > 0) = 1$, josta $\mathbb{P}(D > 0) = \frac{1}{2}$. Näin ollen $\mathbb{P}(X > Y) = \frac{1}{2}$.

Kun merkitään X :llä jäljelle jääneen asiakkaan palveluaikaa ja Y :llä viimeiseksi tulleen palveluaikaa, saadaan johtopäätös edellä mainituin perusteluin.