

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Demonstraatio 4, 7.2.2023

1. Oletetaan tunnetuksi, että riippumattomille satunnaismuuttujille X ja Y pätee $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Miten tästä seuraa, että riippumattomille satunnaismuuttujille $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$?
2. Yritys valmistaa Led-lamppuja, joiden kestoikä on likimain normaalisti jakautunut, odotusarvon ollessa $\mu = 25000$ ja keskihajonnan $\sigma = 4000$ (aikayksikkönä tunti).
 - a) Millä todennäköisyydellä lamppu kestää yli 28000 tuntia?
 - b) Millä todennäköisyydellä lamppu kestää alle 20000 tuntia?
 - c) Mikä on kesto aika, jonka ylittää vain 1% lampuista?

Ohje: Matlabissa standardoidun normaalijakauman kertymäfunktion käänteisfunktio saadaan muodossa

`norminv(p)`.

3. Merkitään klaavaa 1:llä ja kruunaa 2:lle painottamattoman kolikon heitossa. Kun kolikkoa heitetään n kertaa. Olkoon X_i i :nnessä heiton tulos (joko 1 tai 2) sekä $\bar{X}_n$ kaikkien heittojen tulosten otoskeskiarvo.

Käytä suurten lukujen lakia selvittääksesi kuinka monta heittoa n tarvitaan, että $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)| < 0.01) \geq 0.99$

4. Hyllyissä on tilaa kirjoille yhteensä 150 m. Yhden kirjan paksuus on keskimäärin $\mu = 3$ cm ja paksuuden keskihajonta $\sigma = 0,8$ cm. Arvioi millä todennäköisyydellä 5200 kirjaa ei mahdu hyllyihin.

Ohje: Jos X_i on kirjan i paksuus, on yhteispaksuus $X_1 + \dots + X_{5200}$. Käytä keskeistä raja-arvolauseetta.

5. Kun heitetään noppaa 1000 kertaa, saadaan 180 kertaa silmäluku 6. Arvioi tällaisen tapahtuman todennäköisyyttä, mikäli noppa on painottamaton.

Ohje: Voit esimerkiksi määritellä satunnaismuuttujan X joka saa kaksi arvoa: 0, jos silmäluku on ≤ 5 ja 1, jos silmäluku on 6 ja soveltaa keskeistä raja-arvolauseetta.

Vaihtoehtoisesti todennäköisyyttä voi arvioida binomijakaumaa käyttäen.

6. Olkoon X normaalijakautuman $N(\mu, \sigma^2)$ mukainen satunnaismuuttuja. Määritä todennäköisyydet $\mathbb{P}(|X - \mu| > 3\sigma)$ ja $\mathbb{P}(|X - \mu| > 5\sigma)$.
7. Satunnaismuuttuja X saa arvot 1, 2, 3 ja 4 todennäköisyyksillä $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ja $\frac{1}{8}$. Laske entropia $H(X)$ (yksikkönä bitti)
8. Satunnaismuuttujien X ja Y mahdolliset arvot ovat joukossa $\{1, 2, 3, 4\}$ ja näillä on seuraavan taulukon mukainen yhteisjakauma:

$\begin{matrix} \backslash \\ Y \end{matrix} \begin{matrix} X \\ \end{matrix}$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{4}$	0	0	0

Määritä todennäköisyydet $\mathbb{P}(X = i)$ ja $\mathbb{P}(Y = i)$, kun $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ja laske entropiat $H(X)$, $H(Y)$, $H(X | Y)$ sekä $I(X | Y)$. Ohje: Esim. Todennäköisyys sille, että Y saa arvon 1 lasketaan 1. rivin todennäköisyyksien summana (miksi?)

9. Jääkiekkjoukkue voitaan kotona pelatessaan todennäköisyydellä $\frac{3}{5}$, mutta vierasjoukkueena pelatessaan vain todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$. Pelipaikka on todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$ kotihalli ja $\frac{3}{4}$ vieras halli.

Millä todennäköisyydellä joukkue voittaa pelin? Olkoon X satunnaismuuttuja, joka saa arvot $\{\text{voitto, häviö}\}$ ja Y satunnaismuuttuja, joka saa arvot $\{\text{kotihalli, vierashalli}\}$. Laske $I(X | Y)$.