

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Todennäköisyysslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Tapaukset $A \subseteq S$ ja $B \subseteq S$ ovat toisensa poissulkevat, jos $A \cap B = \emptyset$

Esimerkki

$A = \{2, 4, 6\}$ (parillinen silmäluku) ja $B = \{1, 3, 5\}$ (pariton silmäluku) ovat toisensa poissulkevat. Sen sijaan A (parillinen silmäluku) ja $B_2 = \{5, 6\}$ (silmäluku vähintään 5 eivät ole toisiaan poissulkevia).

Todennäköisyyden aksioomat

- $\mathbb{P}(A) \geq 0$. kaikille $A \subseteq S$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots$ jos tapaukset $A_1, A_2, \dots$, ovat toisensa poissulkevat.

Seurauksia

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, missä $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
- Jos $B \subseteq A$, niin $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.
- $\mathbb{P}(A) \leq 1$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Esimerkki

Olkoot $A = \{2, 4, 6\}$ (parillinen silmäluku) ja $B = \{5, 6\}$ (vähintään 5). Tällöin

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Määritelmä

Ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}(A \mid B)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, jolla A tapahtuu, kun tiedetään, että B on tapahtunut.

Esimerkki

Jos tiedetään, että nopanheitossa tulos on parillinen, niin nelosen todennäköisyys on $\frac{1}{3}$. Jos taas tiedetään, että tulos on pariton, on nelosen todennäköisyys 0.

Määritelmä

Jos $\mathbb{P}(B) > 0$, on

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Huomautus

- $0 \leq \mathbb{P}(A \mid B) \leq 1$
- $\mathbb{P}(A \mid B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \mid B)$

Esimerkki

Esimerkit 1.18 ja 1.19

Bayesin lause

Jos $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, on

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B)$$

Seuraus

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(C \mid A \cap B).$$

Kokonaistodennäköisyys

Jos tapaukset $A_1, \dots, A_n$ ovat toisensa poissulkevat ja

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \dots A_n,$$

on

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B \mid A_2)\mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(B \mid A_n)\mathbb{P}(A_n).$$

Esimerkki

Esimerkki 1.20

Esimerkki

Kahdella ihmisellä 10 000:sta on virustartunta. Tartunnan saaneilla ihmisillä testi ilmoittaa 99,99% todennäköisyydellä tartunnasta, kun taas niillä joilla ei ole tartuntaa, testi ilmoittaa sen 99,9% todennäköisyydellä.

Tartunnan todennäköisyys positiivisen testituloksen saaneille voidaan laskea seuraavasti: Merkitään tapauksia T (tartunta), E (ei tartuntaa), P (positiivinen testitulos) ja N (negatiivinen testitulos). Tällöin siis $\mathbb{P}(T) = 0,0002$, $\mathbb{P}(E) = 0,9998$, $\mathbb{P}(P | T) = 0,9999$, $\mathbb{P}(N | T) = 0,0001$, $\mathbb{P}(P | E) = 0,001$ ja $\mathbb{P}(N | E) = 0,999$.

Esimerkki

Bayesin lauseen mukaan

$$\mathbb{P}(T | P) = \frac{\mathbb{P}(P | T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(P)}.$$

Koska

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(P | T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(P | E)\mathbb{P}(E) \\ &= 0,9999 \cdot 0,0002 + 0,001 \cdot 0,9998 = 0,00119978,\end{aligned}$$

on

$$\mathbb{P}(T | P) = \frac{0,9999 \cdot 0,0002}{0,00119978} = 0,166681$$

Määritelmä

Tapaukset A ja B ovat *riippumattomat*, jos

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Esimerkki

Heitetään kahta noppaa. Todennäköisyys sille, että 1. noppa tuottaa kolmosen (A) ja toinen nelosen (B), on

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Riippumattomuus

Jos $\mathbb{P}(A) > 0$ ja $\mathbb{P}(B) > 0$, on

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \mid B) &= \mathbb{P}(A) \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}(B \mid A) &= \mathbb{P}(B).\end{aligned}$$

Yleistys

$A_1, A_2, \dots, A_n$ ovat keskenään riippumattomat, jos

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \dots \mathbb{P}(A_n).$$

Huomautus

- Toisensa poissulkevat tapaukset ovat riippuvia: Jos toinen tapahtuu, ei toinen voi tapahtua (paitsi jos nollatodennäköisyys molemmilla).
- Riippumattomuudesta ei kuitenkaan seuraa poissulkevuus.
- Jos A ja B ovat riippumattomat, niin ovat myös A ja $\overline{B}$, kuin myös $\overline{A}$ ja B , sekä $\overline{A}$ ja $\overline{B}$.

Esimerkki

Kolme metsästäjää 1, 2 ja 3 ampuu samaa jänistä toisistaan riippumatta. 1. osuu todennäköisyydellä 0,05, 2. 0,08 ja 3. 0,01. Olkoon A_i tapaus, että jänikseen osuu i laukausta, $0 \leq i \leq 3$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_0) &= \mathbb{P}(\bar{1} \cap \bar{2} \cap \bar{3}) = \mathbb{P}(\bar{1})\mathbb{P}(\bar{2})\mathbb{P}(\bar{3}) \\ &= 0,95 \cdot 0,92 \cdot 0,99 = 0,86526\end{aligned}$$

(kukaan ei osu)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(1 \cap \bar{2} \cap \bar{3}) + \mathbb{P}(\bar{1} \cap 2 \cap \bar{3}) + \mathbb{P}(\bar{1} \cap \bar{2} \cap 3) \\ &= 0,05 \cdot 0,92 \cdot 0,99 + 0,95 \cdot 0,08 \cdot 0,99 \\ &\quad + 0,95 \cdot 0,92 \cdot 0,01 = 0,12952\end{aligned}$$

(yksi osuu)

Toistokoe

Koe onnistuu todennäköisyydellä p ja sitä toistetaan riippumattomasti.

- Mikä on todennäköisyys, että $k - 1$ ensimmäistä toistoa epäonnistuu ja k :s onnistuu?
- Mikä on todennäköisyys, että onnistuneiden kokeiden määrä on k , kun toistoja on n ?
- Koetta toistetaan kunnes onnistumisia on n . Millä todennäköisyydellä toistoja tarvitaan $k \geq n$?