

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Poissulkevuus

Tapaukset $A_1, A_2, \dots, A_n$ ovat toisensa poissulkevat, jos $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina, kun $i \neq j$. Tällöin

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n).$$

Ehdollinen todennäköisyys

Bayesin lause:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B)$$

Kokonaistodennäköisyys

Oletetaan, että $A_1, A_2, \dots, A_n$ ovat toisensa poissulkevat ja $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Jos $B \subset \Omega$, ovat myös $B \cap A_i$ toisensa poissulkevat ja

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup \dots \cup (B \cap A_n).$$

Tästä

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i).$$

Bayesin lause

$$\mathbb{P}(A_k \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_k) \mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i)}$$

Riippumattomuus

Tapaukset A ja B ovat riippumattomat, jos $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Tämä on ekvivalentti ehtojen $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$ ja $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$ kanssa.

Määritelmä

Tapaukset $A_1, A_2, \dots, A_n$ ovat riippumattomat, jos

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} \mathbb{P}(A_i)$$

kaikille $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

Erityisesti

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \dots \mathbb{P}(A_n)$$

jos tapaukset $A_1, \dots, A_n$ ovat riippumattomat.

Esimerkkejä

Esimerkit 1.19, 1.24, 1.25, 1.26

Monty Hall Show

Kilpailija saa valita yhden kolmesta ovesta. Kahden oven takana on vuohi, yhden takana auto. Valinnan jälkeen juontaja avaa sellaisen oven, jota kilpailija ei valinnut ja jonka takana on vuohi. Tämän jälkeen kilpailija saa vaihtaa ovea. Kannattaako vaihto jos haluaa auton?

Toistokoe

Koe onnistuu todennäköisyydellä p ja sitä toistetaan riippumattomasti.

- Mikä on todennäköisyys, että $k - 1$ ensimmäistä toistoa epäonnistuu ja k :s onnistuu?
- Mikä on todennäköisyys, että onnistuneiden kokeiden määrä on k , kun toistoja on n ?
- Koetta toistetaan kunnes onnistumisia on n . Millä todennäköisyydellä toistoja tarvitaan $k \geq n$?

Määritelmä

Äärellisen (tai numeroituvan) joukon $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq R$ todennäköisyysjakauma on funktio joka toteuttaa ehdot $f(x) \geq 0$ ja $\sum_{x \in X} f(x) = 1$. Tällöin sanotaan, että f on *diskreetti todennäköisyysjakauma* ja että satunnaismuuttuja X saa arvon x_i todennäköisyydellä $f(x_i)$.

Määritelmä

Jos $f(x) \geq 0$ ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$

sanotaan että f on jatkuva todennäköisyysjakauma.

Määritelmä

Jatkuvaan jakaumaan f liittyvä satunnaismuuttuja X saa arvon välillä $[a, b]$ todennäköisyydellä

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X keskiarvo (odotusarvo) on

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

Vertaa:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + x_n \cdot \frac{1}{n}$$

(tasainen diskreetti jakauma)

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) + \dots + x_n \cdot f(x_n)$$

(yleinen diskreetti jakauma)

Esimerkki

Painottamaton noppa: X saa arvot $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, jokaisen todennäköisyydellä $\frac{1}{6}$. Tällöin

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

Painotettu noppa: X saa arvon 6 todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ ja arvot $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ todennäköisyydellä $\frac{1}{10}$. Tällöin

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + \dots + 5 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4,5.$$