

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Määritelmä

Äärellisen (tai numeroituvan) joukon $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ todennäköisyysjakauma on funktio joka toteuttaa ehdot $f(x) \geq 0$ ja $\sum_{x \in X} f(x) = 1$.

Määritelmä

Äärellisen (tai numeroituvan) joukon $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ todennäköisyysjakauma on funktio joka toteuttaa ehdot $f(x) \geq 0$ ja $\sum_{x \in X} f(x) = 1$. Tällöin sanotaan, että f on *diskreetti todennäköisyysjakauma* tai *todennäköisyysfunktio* ja että satunnaismuuttuja X saa arvon x_i todennäköisyydellä $f(x_i)$, siis $\mathbb{P}(X = x_i) = f(x_i)$.

Määritelmä

Jos $f(x) \geq 0$ ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$

sanotaan että f on jatkuva todennäköisyysjakauma tai todennäköisyysfunktio tai tiheysfunktio

Määritelmä

Jos $f(x) \geq 0$ ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$

sanotaan että f on jatkuva todennäköisyysjakauma tai todennäköisyysfunktio tai tiheysfunktio

Määritelmä

Tiheysfunktioon f liittyvä satunnaismuuttuja X saa arvon välillä $[a, b]$ todennäköisyydellä

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Määritelmä

Jakaumafunktio eli kertymäfunktio on

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

(diskreetti jakauma)

Määritelmä

Jakaumafunktio eli kertymäfunktio on

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

(diskreetti jakauma) ja

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

(jatkuva jakauma)

Määritelmä

Jakaumafunktio eli kertymäfunktio on

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

(diskreetti jakauma) ja

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

(jatkuva jakauma)

Huomautus

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1,$$

$F(x)$ on kasvava funktio

Esimerkki

Kahden nopan heitossa

$$F(x) = 0, \text{ kun } x < 2,$$

$$F(x) = \frac{1}{16} \text{ kun } 2 \leq x < 3,$$

$$F(x) = \frac{1}{12} \text{ kun } 3 \leq x < 4,$$

$$F(x) = \frac{1}{6} \text{ kun } 4 \leq x < 5,$$

...

$$F(x) = \frac{35}{36} \text{ kun } 11 \leq x < 12,$$

$$F(x) = 1 \text{ kun } x \geq 12$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

Vertaa:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + x_n \cdot \frac{1}{n}$$

(tasainen diskreetti jakauma)

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

Vertaa:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + x_n \cdot \frac{1}{n}$$

(tasainen diskreetti jakauma)

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) + \dots + x_n \cdot f(x_n)$$

(yleinen diskreetti jakauma)

Esimerkki

Painottamaton noppa: X saa arvot $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, jokaisen todennäköisyydellä $\frac{1}{6}$. Tällöin

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

Esimerkki

Painottamaton noppa: X saa arvot $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, jokaisen todennäköisyydellä $\frac{1}{6}$. Tällöin

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

Painotettu noppa: X saa arvon 6 todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ ja arvot $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ todennäköisyydellä $\frac{1}{10}$. Tällöin

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + \dots + 5 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4,5.$$

Esimerkki

Olkoon X silmälukujen summa kahden painottamattoman nopan heitossa. Tällöin

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{36}, \mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{36}, \dots, \mathbb{P}(X = 7) = \frac{6}{36},$$
$$\mathbb{P}(X = 8) = \frac{5}{36}, \dots, \mathbb{P}(X = 12) = \frac{1}{36}$$

Esimerkki

Olkoon X silmälukujen summa kahden painottamattoman nopan heitossa. Tällöin

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{36}, \mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{36}, \dots, \mathbb{P}(X = 7) = \frac{6}{36},$$
$$\mathbb{P}(X = 8) = \frac{5}{36}, \dots, \mathbb{P}(X = 12) = \frac{1}{36}$$

Tällöin

$$\mathbb{E}(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Huomautus

Jos X on satunnaismuuttuja ja g koko reaaliakselilla määritelty funktio, niin $g(X)$ on myös satunnaismuuttuja ja

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x_i} g(x_i) f(x_i)$$

(diskreetti jakauma)

Huomautus

Jos X on satunnaismuuttuja ja g koko reaaliakselilla määritelty funktio, niin $g(X)$ on myös satunnaismuuttuja ja

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x_i} g(x_i) f(x_i)$$

(diskreetti jakauma) ja

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

(jatkuva jakauma)

Esimerkki

jos $a, b \in \mathbb{R}$ ja $g(X) = aX + b$

$$\mathbb{E}(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x) dx$$

Esimerkki

jos $a, b \in \mathbb{R}$ ja $g(X) = aX + b$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x) dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx\end{aligned}$$

Esimerkki

jos $a, b \in \mathbb{R}$ ja $g(X) = aX + b$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x) dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= a\mathbb{E}(X) + b\end{aligned}$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X varianssi on (jatkuva jakauma)

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X varianssi on (jatkuva jakauma)

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

ja (diskreetti jakauma)

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \sum_{x \in X} (x - \mu)^2 f(x)$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X varianssi on (jatkuva jakauma)

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

ja (diskreetti jakauma)

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \sum_{x \in X} (x - \mu)^2 f(x)$$

Varianssin neliöjuurta $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ kutsutaan *keskihajonnaksi*.

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X varianssi on (jatkuva jakauma)

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

ja (diskreetti jakauma)

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \sum_{x \in X} (x - \mu)^2 f(x)$$

Varianssin neliöjuurta $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ kutsutaan *keskihajonnaksi*.
Varianssi kuvaa jakauman leveyttä

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X n :s origomomentti on (jatkuva jakauma)

$$\alpha_n(X) = \mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X n :s origomomentti on (jatkuva jakauma)

$$\alpha_n(X) = \mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X n :s keskusmomentti on

$$\mu_n(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^n) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n f(x) dx$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X n :s origomomentti on (jatkuva jakauma)

$$\alpha_n(X) = \mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujan X n :s keskusmomentti on

$$\mu_n(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^n) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n f(x) dx$$

Huomautus

$\mu_0(X) = 1$, $\mu_1(X) = 0$ ja $\mu_2(X) = \text{Var}(X)$.

Keskusmomentti vs. origomomentti

$$\text{Var}(X) = \mu_2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Keskusmomentti vs. origomomentti

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mu_2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) dx\end{aligned}$$

Keskusmomentti vs. origomomentti

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mu_2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx\end{aligned}$$

Keskusmomentti vs. origomomentti

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mu_2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\&= \alpha_2 - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1 = \alpha_2 - \mu^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2\end{aligned}$$

Keskusmomentti vs. origomomentti

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mu_2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) dx \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\&= \alpha_2 - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1 = \alpha_2 - \mu^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \\&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\end{aligned}$$

Lause

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

Lause

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

Lause

Lauseke $\mathbb{E}((X - c)^2)$ saa pienimmän arvonsa kun $c = \mathbb{E}(X)$ ja pienin arvo on $\text{Var}(X)$.

Tasainen jakauma

$X = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}$ Tällöin

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1 + \dots + n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n+1}{2}$$

Tasainen jakauma

$X = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}$ Tällöin

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1 + \dots + n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n+1}{2}$$

ja

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 \frac{1}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Binomijakauma

Toistetaan todennäköisyydellä p onnistuva koe (riippumattomasti) n kertaa. Satunnaismuuttujan X arvo on onnistuneiden kokeiden määrä ja tällöin

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Binomijakauma

Toistetaan todennäköisyydellä p onnistuva koe (riippumattomasti) n kertaa. Satunnaismuuttujan X arvo on onnistuneiden kokeiden määrä ja tällöin

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

ja

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ ja } \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

Esimerkki

Lentokoneen moottori menee epäkuntoon todennäköisyydellä $p > 0$. Jos vähintään puolet moottoreista on kunnossa, kone selviytyy.

Esimerkki

Lentokoneen moottori menee epäkuntoon todennäköisyydellä $p > 0$. Jos vähintään puolet moottoreista on kunnossa, kone selviytyy.

Todennäköisyys sille, että kaksimoottorinen kone ei selviydy, on $p \cdot p = p^2$.

Esimerkki

Lentokoneen moottori menee epäkuntoon todennäköisyydellä $p > 0$. Jos vähintään puolet moottoreista on kunnossa, kone selviytyy.

Todennäköisyys sille, että kaksimoottorinen kone ei selviydy, on $p \cdot p = p^2$.

Todennäköisyys sille, että nelimoottorinen kone ei selviydy, on

$$\binom{4}{3} p^3 (1-p) + \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0 = 4p^3 - 3p^4.$$

Esimerkki

Lentokoneen moottori menee epäkuntoon todennäköisyydellä $p > 0$. Jos vähintään puolet moottoreista on kunnossa, kone selviytyy.

Todennäköisyys sille, että kaksimoottorinen kone ei selviydy, on $p \cdot p = p^2$.

Todennäköisyys sille, että nelimoottorinen kone ei selviydy, on

$$\binom{4}{3} p^3 (1-p) + \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0 = 4p^3 - 3p^4.$$

$$4p^3 - 3p^4 < p^2 \Leftrightarrow p \in (0, \frac{1}{3}).$$

Poisson-jakauma

Jos $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$, on X :llä Poisson-jakauma, jos

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Poisson-jakauma

Jos $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$, on X :llä Poisson-jakauma, jos

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Huomautus

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Huomautus

Poisson-jakauma on hyvä approksimaatio Binomijakaumalle, mikäli p on pieni ja n suuri.

Huomautus

Poisson-jakauma on hyvä approksimaatio Binomijakaumalle, mikäli p on pieni ja n suuri. Tarkemmin: Jos merkitään $p = \lambda/n$, on

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Approksimaatio binomijakaumalle

Jos merkitään $p = \frac{\lambda}{n}$ ($\lambda = np = \mathbb{E}(X)$)

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Approksimaatio binomijakaumalle

Jos merkitään $p = \frac{\lambda}{n}$ ($\lambda = np = \mathbb{E}(X)$)

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ = & \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Approksimaatio binomijakaumalle

Jos merkitään $p = \frac{\lambda}{n}$ ($\lambda = np = \mathbb{E}(X)$)

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ = & \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ = & \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \end{aligned}$$

Approksimaatio binomijakaumalle

Jos merkitään $p = \frac{\lambda}{n}$ ($\lambda = np = \mathbb{E}(X)$)

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ = & \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ = & \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} & e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

Lause

Poisson-jakaumalle

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

Lause

Poisson-jakaumalle

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

ja

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

Lause

Poisson-jakaumalle

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

ja

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

Lause

Jos $f(k, t) = \mathbb{P}(k \text{ tapahtumaa aikavälillä } [0, t])$ ja

- tapahtumat ovat riippumattomat

Lause

Poisson-jakaumalle

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

ja

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

Lause

Jos $f(k, t) = \mathbb{P}(k \text{ tapahtumaa aikavälillä } [0, t])$ ja

- tapahtumat ovat riippumattomat
- $\mathbb{P}(\text{yksi tapahtuma } h\text{-pituisella aikavälillä}) = (\nu + g(h)) \cdot h$,
missä $g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Lause

Poisson-jakaumalle

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

ja

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

Lause

Jos $f(k, t) = \mathbb{P}(k \text{ tapahtumaa aikavälillä } [0, t])$ ja

- tapahtumat ovat riippumattomat
- $\mathbb{P}(\text{yksi tapahtuma } h\text{-pituisella aikavälillä}) = (v + g(h)) \cdot h$,
missä $g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.
- $\mathbb{P}(k > 1 \text{ tapahtumaa } h\text{-pituisella aikavälillä}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

niin $f(k, t) = \frac{e^{-vt}(vt)^k}{k!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, missä $\lambda = vt$.

Esimerkki

Sadasta signaalista keskimäärin yksi muuttuu kanavassa. Kun lähetetään 200 toisistaan riippumatonta signaalia, mikä on todennäköisyys sille että ainakin kolme muuttuu?

Esimerkki

Sadasta signaalista keskimäärin yksi muuttuu kanavassa. Kun lähetetään 200 toisistaan riippumatonta signaalia, mikä on todennäköisyys sille että ainakin kolme muuttuu?

Binomijakaumaa käyttäen:

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3)$$

Esimerkki

Sadasta signaalista keskimäärin yksi muuttuu kanavassa. Kun lähetetään 200 toisistaan riippumatonta signaalia, mikä on todennäköisyys sille että ainakin kolme muuttuu?

Binomijakaumaa käyttäen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) \\ &= 1 - \binom{200}{0} 0,01^0 \cdot 0,99^{200} - \binom{200}{1} 0,01^1 \cdot 0,99^{199} \\ &\quad - \binom{200}{2} 0,01^2 \cdot 0,98^{198}\end{aligned}$$

Esimerkki

Sadasta signaalista keskimäärin yksi muuttuu kanavassa. Kun lähetetään 200 toisistaan riippumatonta signaalia, mikä on todennäköisyys sille että ainakin kolme muuttuu?

Binomijakaumaa käyttäen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) \\ &= 1 - \binom{200}{0} 0,01^0 \cdot 0,99^{200} - \binom{200}{1} 0,01^1 \cdot 0,99^{199} \\ &\quad - \binom{200}{2} 0,01^2 \cdot 0,99^{198} \\ &= 0,323321 \dots\end{aligned}$$

Esimerkki

Poisson-jakaumaa käyttäen: Tässä $p = 0,01$ ja $n = 200$, joten $\lambda = \mathbb{E}(X) = 0,01 \cdot 200 = 2$

Esimerkki

Poisson-jakaumaa käyttäen: Tässä $p = 0,01$ ja $n = 200$, joten $\lambda = \mathbb{E}(X) = 0,01 \cdot 200 = 2$ ja

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3)$$

Esimerkki

Poisson-jakaumaa käyttäen: Tässä $p = 0,01$ ja $n = 200$, joten $\lambda = \mathbb{E}(X) = 0,01 \cdot 200 = 2$ ja

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) \\ &= 1 - e^{-2} \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right)\end{aligned}$$

Esimerkki

Poisson-jakaumaa käyttäen: Tässä $p = 0,01$ ja $n = 200$, joten $\lambda = \mathbb{E}(X) = 0,01 \cdot 200 = 2$ ja

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) \\ &= 1 - e^{-2} \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right) \\ &= 1 - e^{-2}(1 + 2 + 2)\end{aligned}$$

Esimerkki

Poisson-jakaumaa käyttäen: Tässä $p = 0,01$ ja $n = 200$, joten $\lambda = \mathbb{E}(X) = 0,01 \cdot 200 = 2$ ja

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) \\ &= 1 - e^{-2} \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right) \\ &= 1 - e^{-2} (1 + 2 + 2) \\ &= 0,323324 \dots\end{aligned}$$

Esimerkki

Radioaktiivinen hajoaminen noudattaa hyvin edellisen lauseen oletuksia.

Esimerkki

Radioaktiivinen hajoaminen noudattaa hyvin edellisen lauseen oletuksia. Yksi gramma radioaktiivisen aineen isotooppia lähettää keskimäärin $3,57 \cdot 10^{10}$ α -hiukkasta sekunnissa.

Esimerkki

Radioaktiivinen hajoaminen noudattaa hyvin edellisen lauseen oletuksia. Yksi gramma radioaktiivisen aineen isotooppia lähettää keskimäärin $3,57 \cdot 10^{10}$ α -hiukkasta sekunnissa. Olkoon X satunnaismuuttuja joka edustaa α -hiukkasten määrää nanosekunnissa.

Esimerkki

Radioaktiivinen hajoaminen noudattaa hyvin edellisen lauseen oletuksia. Yksi gramma radioaktiivisen aineen isotooppia lähettää keskimäärin $3,57 \cdot 10^{10}$ α -hiukkasta sekunnissa. Olkoon X satunnaismuuttuja joka edustaa α -hiukkasten määrää nanosekunnissa. Tällöin $\mathbb{E}(X) = 3,57 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9} = 35,7$

Esimerkki

Radioaktiivinen hajoaminen noudattaa hyvin edellisen lauseen oletuksia. Yksi gramma radioaktiivisen aineen isotooppia lähettää keskimäärin $3,57 \cdot 10^{10}$ α -hiukkasta sekunnissa. Olkoon X satunnaismuuttuja joka edustaa α -hiukkasten määrää nanosekunnissa. Tällöin $\mathbb{E}(X) = 3,57 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9} = 35,7$ ja

$$\mathbb{P}(X = 36) = e^{-35,7} \cdot \frac{35,7^{36}}{36!} = 0,0662533.$$

Esimerkki

Radioaktiivinen hajoaminen noudattaa hyvin edellisen lauseen oletuksia. Yksi gramma radioaktiivisen aineen isotooppia lähettää keskimäärin $3,57 \cdot 10^{10}$ α -hiukkasta sekunnissa. Olkoon X satunnaismuuttuja joka edustaa α -hiukkasten määrää nanosekunnissa. Tällöin $\mathbb{E}(X) = 3,57 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9} = 35,7$ ja

$$\mathbb{P}(X = 36) = e^{-35,7} \cdot \frac{35,7^{36}}{36!} = 0,0662533.$$

Lisäksi

$$\mathbb{P}(35 \leq X \leq 37) = e^{-35,7} \left(\frac{35,7^{35}}{35!} + \frac{35,7^{36}}{36!} + \frac{35,7^{37}}{37!} \right) = 0,196989 \dots$$

Huomautus

Poisson-jakaumaa voidaan soveltaa myös tilanteeseen, jossa ajan sijasta tarkastellaan pituutta, pinta-alaa tai tilavuutta.

Huomautus

Poisson-jakaumaa voidaan soveltaa myös tilanteeseen, jossa ajan sijasta tarkastellaan pituutta, pinta-alaa tai tilavuutta.

Esimerkki

Terveellä ihmisellä on noin 6000 valkosolua mm^3 :ssa verta. Tutkimukseen otetaan $0,001 \text{ mm}^3$ suuruinen verinäyte,

Huomautus

Poisson-jakaumaa voidaan soveltaa myös tilanteeseen, jossa ajan sijasta tarkastellaan pituutta, pinta-alaa tai tilavuutta.

Esimerkki

Terveellä ihmisellä on noin 6000 valkosolua mm^3 :ssa verta. Tutkimukseen otetaan $0,001 \text{ mm}^3$ suuruinen verinäyte, josta keskimäärin pitäisi siis löytyä 6 valkosolua.

Huomautus

Poisson-jakaumaa voidaan soveltaa myös tilanteeseen, jossa ajan sijasta tarkastellaan pituutta, pinta-alaa tai tilavuutta.

Esimerkki

Terveellä ihmisellä on noin 6000 valkosolua mm^3 :ssa verta.

Tutkimukseen otetaan $0,001 \text{ mm}^3$ suuruinen verinäyte, josta keskimäärin pitäisi siis löytyä 6 valkosolua.

Määritetään todennäköisyys sille, että terveen ihmisen näytteestä löytyy korkeintaan 2 valkosolua.

Huomautus

Poisson-jakaumaa voidaan soveltaa myös tilanteeseen, jossa ajan sijasta tarkastellaan pituutta, pinta-alaa tai tilavuutta.

Esimerkki

Terveellä ihmisellä on noin 6000 valkosolua mm^3 :ssa verta.

Tutkimukseen otetaan $0,001 \text{ mm}^3$ suuruinen verinäyte, josta keskimäärin pitäisi siis löytyä 6 valkosolua.

Määritetään todennäköisyys sille, että terveen ihmisen näytteestä löytyy korkeintaan 2 valkosolua. Tässä $\lambda = 6$, joten

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = e^{-6} \sum_{k=0}^2 \frac{6^k}{k!}$$

Huomautus

Poisson-jakaumaa voidaan soveltaa myös tilanteeseen, jossa ajan sijasta tarkastellaan pituutta, pinta-alaa tai tilavuutta.

Esimerkki

Terveellä ihmisellä on noin 6000 valkosolua mm^3 :ssa verta.

Tutkimukseen otetaan $0,001 \text{ mm}^3$ suuruinen verinäyte, josta keskimäärin pitäisi siis löytyä 6 valkosolua.

Määritetään todennäköisyys sille, että terveen ihmisen näytteestä löytyy korkeintaan 2 valkosolua. Tässä $\lambda = 6$, joten

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = e^{-6} \sum_{k=0}^2 \frac{6^k}{k!} = 0,0619688$$

Huomautus

Jos satunnaisesti esiintyvän tapahtuman lukumäärällä X aikavälillä $[0, t]$ on Poisson-jakauma ja aikavälillä $[0, 1]$ esiintyy keskimäärin v tapahtumaa

Huomautus

Jos satunnaisesti esiintyvän tapahtuman lukumäärällä X aikavälillä $[0, t]$ on Poisson-jakauma ja aikavälillä $[0, 1]$ esiintyy keskimäärin v tapahtumaa, niin välillä $[0, t]$ esiintyy keskimäärin vt tapahtumaa ja satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x) = e^{-vt} \frac{(vt)^x}{x!}$$

Merkitään ensimmäisen tapahtuman aikaa T :llä.

Huomautus

Jos satunnaisesti esiintyvän tapahtuman lukumäärällä X aikavälillä $[0, t]$ on Poisson-jakauma ja aikavälillä $[0, 1]$ esiintyy keskimäärin v tapahtumaa, niin välillä $[0, t]$ esiintyy keskimäärin vt tapahtumaa ja satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x) = e^{-vt} \frac{(vt)^x}{x!}$$

Merkitään ensimmäisen tapahtuman aikaa T :llä. Jos aikavälillä $[0, t]$ ei satu yhtään tapahtumaa, on siis $T > t$ ja

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(X = 0) = e^{-vt}$$

Huomautus

Jos satunnaisesti esiintyvän tapahtuman lukumäärällä X aikavälillä $[0, t]$ on Poisson-jakauma ja aikavälillä $[0, 1]$ esiintyy keskimäärin v tapahtumaa, niin välillä $[0, t]$ esiintyy keskimäärin vt tapahtumaa ja satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x) = e^{-vt} \frac{(vt)^x}{x!}$$

Merkitään ensimmäisen tapahtuman aikaa T :llä. Jos aikavälillä $[0, t]$ ei satu yhtään tapahtumaa, on siis $T > t$ ja

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(X = 0) = e^{-vt},$$

josta

$$\mathbb{P}(t \leq T) = 1 - e^{-vt}$$

Huomautus

$$\mathbb{P}(t \leq T) = 1 - e^{-vt}$$

on satunnaismuuttujan T kertymäfunktio, josta tiheysfunktio f saadaan derivoimalla:

$$f(t) = \frac{d}{dt}(1 - e^{-vt}) = ve^{-vt}.$$

Määritelmä

Jatkuvalla satunnaismuuttujalla T on eksponenttijakauma, jos sen tiheysfunktio on muotoa $f(t) = ve^{-vt}$ (kun $t \geq 0$).

Määritelmä

Jatkuvalla satunnaismuuttujalla T on eksponenttijakauma, jos sen tiheysfunktio on muotoa $f(t) = ve^{-vt}$ (kun $t \geq 0$).

Tällöin

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{v} \text{ ja } \text{Var}(T) = \frac{1}{v^2}$$

Eksponenttijakauma

Määritelmä

Jatkuvalla satunnaismuuttujalla T on eksponenttijakauma, jos sen tiheysfunktio on muotoa $f(t) = ve^{-vt}$ (kun $t \geq 0$).

Tällöin

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{v} \text{ ja } \text{Var}(T) = \frac{1}{v^2}$$

Huomautus

Jos satunnaismuuttujalla on eksponenttijakauma, on

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > t_1 + t_2 \mid T > t_1) &= \frac{\mathbb{P}(T > t_1 + t_2)}{\mathbb{P}(T > t_1)} = \frac{e^{-v(t_1+t_2)}}{e^{-vt_1}} = e^{-vt_2} \\ &= \mathbb{P}(T > t_2) \end{aligned}$$

(Muistittomuus).

Esimerkki

Geysir purkautuu keskimäärin 40 minuutin välein ja purkausten väliaika noudattaa eksponenttijakaumaa.

Esimerkki

Geysir purkautuu keskimäärin 40 minuutin välein ja purkausten väliaika noudattaa eksponenttijakaumaa.

Lasketaan todennäköisyys sille, että juuri tapahtuneen purkauksen jälkeen seuraavaan purkaukseen on ainakin 50 min.

Esimerkki

Geysir purkautuu keskimäärin 40 minuutin välein ja purkausten väliaika noudattaa eksponenttijakaumaa.

Lasketaan todennäköisyys sille, että juuri tapahtuneen purkauksen jälkeen seuraavaan purkaukseen on ainakin 50 min.

Parametri $\nu = \frac{1}{40}$, ja todennäköisyystiheys $f(t) = \nu e^{-\nu t}$,

Esimerkki

Geysir purkautuu keskimäärin 40 minuutin välein ja purkausten väliaika noudattaa eksponenttijakaumaa.

Lasketaan todennäköisyys sille, että juuri tapahtuneen purkauksen jälkeen seuraavaan purkaukseen on ainakin 50 min.

Parametri $\nu = \frac{1}{40}$, ja todennäköisyystiheys $f(t) = \nu e^{-\nu t}$, kun taas kertymäfunktio $\mathbb{P}(T \leq 50) = 1 - e^{-\nu \cdot 50}$.

Esimerkki

Geysir purkautuu keskimäärin 40 minuutin välein ja purkausten väliaika noudattaa eksponenttijakaumaa.

Lasketaan todennäköisyys sille, että juuri tapahtuneen purkauksen jälkeen seuraavaan purkaukseen on ainakin 50 min.

Parametri $\nu = \frac{1}{40}$, ja todennäköisyystiheys $f(t) = \nu e^{-\nu t}$, kun taas kertymäfunktio $\mathbb{P}(T \leq 50) = 1 - e^{-\nu \cdot 50}$.

Tällöin

$$\mathbb{P}(T \geq 50) = 1 - \mathbb{P}(T \leq 50) = 1 - (1 - e^{-\nu \cdot 50}) = 0,2865 \dots$$

Esimerkki

Geysirin edellisestä purkauksesta on 20 minuuttia. Mikä todennäköisyys sille, että seuraavaa saadaan odottaa ainakin 50 minuuttia?

Esimerkki

Geysirin edellisestä purkauksesta on 20 minuuttia. Mikä todennäköisyys sille, että seuraavaa saadaan odottaa ainakin 50 minuuttia?

Muistittomuusominaisuuden perusteella

$$\mathbb{P}(T \geq 50 + 20 \mid T \geq 20) = \mathbb{P}(T \geq 50) = 0,2865 \dots$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujaa T kutsutaan Poisson-prosessiksi, jos

- T :llä on Poisson-jakauma parametrilla $\lambda = vt$.
- Eri aikaväleillä sattuvat tapaukset ovat riippumattomat.

Määritelmä

Satunnaismuuttujaa T kutsutaan Poisson-prosessiksi, jos

- T :llä on Poisson-jakauma parametrilla $\lambda = vt$.
- Eri aikaväleillä sattuvat tapaukset ovat riippumattomat.

Huomautus

Edellämainitun perusteella Poisson-prosessin tapahtumien aikavälit noudattavat eksponenttijakaumaa. Parametria v kutsutaan Poisson-prosessin nopeudeksi.

Määritelmä

Jatkuvalla satunnaismuuttujalla on *standardoitu* normaalijakauma, jos sen tiheysfunktio on muotoa

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Määritelmä

Jatkuvalla satunnaismuuttujalla on *standardoitu* normaalijakauma, jos sen tiheysfunktio on muotoa

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Tällöin kertymäfunktio on muotoa

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Määritelmä

Jatkuvalla satunnaismuuttujalla on *standardoitu* normaalijakauma, jos sen tiheysfunktio on muotoa

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Tällöin kertymäfunktio on muotoa

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Normaalijakaumaa kutsutaan myös *Gaussin jakaumaksi* ja sen tiheysfunktion kuvaajaa *Gaussin kellokäyräksi*.

Huomautus

Integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi}$$

on hankala laskea.

Huomautus

Integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi}$$

on hankala laskea.

Vielä hankalampi laskettava on

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Huomautus

Integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi}$$

on hankala laskea.

Vielä hankalampi laskettava on

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Aiemmin taulukot,

Huomautus

Integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi}$$

on hankala laskea.

Vielä hankalampi laskettava on

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Aiemmin taulukot, nykyisin ohjelmistot.

Lause

Standardoidulle normaalijakaumalle

$$\mathbb{E}(X) = 0 \text{ ja } \text{Var}(X) = 1 \text{ ja } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Lause

Standardoidulle normaalijakaumalle

$$\mathbb{E}(X) = 0 \text{ ja } \text{Var}(X) = 1 \text{ ja } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Esimerkki

Jos jatkuvalla satunnaismuuttujalla on standardoitu normaalijakauma, on

- $\mathbb{P}(X \leq 1,28) = \Phi(1,28) = 0,8997$

Lause

Standardoidulle normaalijakaumalle

$$\mathbb{E}(X) = 0 \text{ ja } \text{Var}(X) = 1 \text{ ja } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Esimerkki

Jos jatkuvalla satunnaismuuttujalla on standardoitu normaalijakauma, on

- $\mathbb{P}(X \leq 1,28) = \Phi(1,28) = 0,8997$
- $\mathbb{P}(X > 1,28) = 1 - \Phi(1,28) = 0,1003$

Lause

Standardoidulle normaalijakaumalle

$$\mathbb{E}(X) = 0 \text{ ja } \text{Var}(X) = 1 \text{ ja } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Esimerkki

Jos jatkuvalla satunnaismuuttujalla on standardoitu normaalijakauma, on

- $\mathbb{P}(X \leq 1, 28) = \Phi(1, 28) = 0, 8997$
- $\mathbb{P}(X > 1, 28) = 1 - \Phi(1, 28) = 0, 1003$
- $\mathbb{P}(X < -1, 28) = 1 - \Phi(1, 28) = 0, 1003$

Lause

Standardoidulle normaalijakaumalle

$$\mathbb{E}(X) = 0 \text{ ja } \text{Var}(X) = 1 \text{ ja } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Esimerkki

Jos jatkuvalla satunnaismuuttujalla on standardoitu normaalijakauma, on

- $\mathbb{P}(X \leq 1, 28) = \Phi(1, 28) = 0,8997$
- $\mathbb{P}(X > 1, 28) = 1 - \Phi(1, 28) = 0,1003$
- $\mathbb{P}(X < -1, 28) = 1 - \Phi(1, 28) = 0,1003$
- $\mathbb{P}(X \geq -1, 28) = 1 - \Phi(-1, 28) = 0,8997$

Yleinen normaalijakauma

Jakaumalla $N(\mu, \sigma^2)$ tarkoitetaan jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

ja tästä johdettava kertymäfunktio

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Yleinen normaalijakauma

Jakaumalla $N(\mu, \sigma^2)$ tarkoitetaan jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

ja tästä johdettava kertymäfunktio

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Jakaumalle $N(\mu, \sigma^2)$ on $\mathbb{E}(X) = \mu$ ja $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

Esimerkki

Jos satunnaismuuttujalla X on jakauma $N(\mu, \sigma^2)$, voidaan todennäköisyyksiä määrittää edellisen huomautuksen perusteella.

Jos esim. $\mu = 6$ ja $\sigma^2 = 5$, on

- $\mathbb{P}(X \leq 7,54) = \Phi\left(\frac{7,54-6}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(0,69) = 0,7549$

Esimerkki

Jos satunnaismuuttujalla X on jakauma $N(\mu, \sigma^2)$, voidaan todennäköisyyksiä määrittää edellisen huomautuksen perusteella.

Jos esim. $\mu = 6$ ja $\sigma^2 = 5$, on

- $\mathbb{P}(X \leq 7,54) = \Phi\left(\frac{7,54-6}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(0,69) = 0,7549$
- $\mathbb{P}(X > 7,54) = 1 - \Phi\left(\frac{7,54-6}{\sqrt{5}}\right) = 0,2451$

Esimerkki

Jos satunnaismuuttujalla X on jakauma $N(\mu, \sigma^2)$, voidaan todennäköisyyksiä määrittää edellisen huomautuksen perusteella.

Jos esim. $\mu = 6$ ja $\sigma^2 = 5$, on

- $\mathbb{P}(X \leq 7,54) = \Phi\left(\frac{7,54-6}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(0,69) = 0,7549$
- $\mathbb{P}(X > 7,54) = 1 - \Phi\left(\frac{7,54-6}{\sqrt{5}}\right) = 0,2451$
- $\mathbb{P}(X \leq 4,46) = \Phi\left(\frac{4,46-6}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(-0,69) = 0,2451$

Esimerkki

Jos satunnaismuuttujalla X on jakauma $N(\mu, \sigma^2)$, voidaan todennäköisyyksiä määrittää edellisen huomautuksen perusteella.

Jos esim. $\mu = 6$ ja $\sigma^2 = 5$, on

- $\mathbb{P}(X \leq 7,54) = \Phi\left(\frac{7,54-6}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(0,69) = 0,7549$
- $\mathbb{P}(X > 7,54) = 1 - \Phi\left(\frac{7,54-6}{\sqrt{5}}\right) = 0,2451$
- $\mathbb{P}(X \leq 4,46) = \Phi\left(\frac{4,46-6}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(-0,69) = 0,2451$
- $\mathbb{P}(X > 4,46) = 1 - \Phi\left(\frac{4,46-6}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \Phi(-0,69) = \Phi(0,69) = 0,7549$

Esimerkki

Jos satunnaismuuttujalla X on jakauma $N(\mu, \sigma^2)$, voidaan todennäköisyyksiä määrittää edellisen huomautuksen perusteella.

Jos esim. $\mu = 6$ ja $\sigma^2 = 5$, on

- $\mathbb{P}(X \leq 7,54) = \Phi\left(\frac{7,54-6}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(0,69) = 0,7549$
- $\mathbb{P}(X > 7,54) = 1 - \Phi\left(\frac{7,54-6}{\sqrt{5}}\right) = 0,2451$
- $\mathbb{P}(X \leq 4,46) = \Phi\left(\frac{4,46-6}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(-0,69) = 0,2451$
- $\mathbb{P}(X > 4,46) = 1 - \Phi\left(\frac{4,46-6}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \Phi(-0,69) = \Phi(0,69) = 0,7549$

Markovin epäyhtälö

Jos $\mathbb{P}(X < 0) = 0$ ja $a > 0$, on

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Markovin epäyhtälö

Jos $\mathbb{P}(X < 0) = 0$ ja $a > 0$, on

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Chebyschevin epäyhtälö

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$