

Insinöörimatematiikka: Todennäköisyyslaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Tasainen jakauma

$X = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}$ Tällöin

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1 + \dots + n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n+1}{2}$$

ja

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 \frac{1}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Binomijakauma

Toistetaan todennäköisyydellä p onnistuva koe (riippumattomasti) n kertaa. Satunnaismuuttujan X arvo on onnistuneiden kokeiden määrä ja tällöin

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

ja

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ ja } \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

Esimerkki

Lentokoneen moottori menee epäkuntoon todennäköisyydellä $p > 0$. Jos vähintään puolet moottoreista on kunnossa, kone selviytyy.

Todennäköisyys sille, että kaksimoottorinen kone ei selviydy, on $p \cdot p = p^2$.

Todennäköisyys sille, että nelimoottorinen kone ei selviydy, on

$$\binom{4}{3} p^3 (1-p) + \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0 = 4p^3 - 3p^4.$$

$$4p^3 - 3p^4 < p^2 \Leftrightarrow p \in (0, \frac{1}{3}).$$

Poisson-jakauma

Jos $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$, on X :llä Poisson-jakauma, jos

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Huomautus

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Huomautus

Poisson-jakauma on hyvä approksimaatio Binomijakaumalle, mikäli p on pieni ja n suuri. Tarkemmin: Jos merkitään $p = \lambda/n$, on

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Approksimaatio binomijakaumalle

Jos merkitään $p = \frac{\lambda}{n}$ ($\lambda = np = \mathbb{E}(X)$)

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ = & \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ = & \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} & e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

Lause

Poisson-jakaumalle

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

ja

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

Lause

Jos $f(k, t) = \mathbb{P}(k \text{ tapahtumaa aikavälillä } [0, t])$ ja

- tapahtumat ovat riippumattomat
- $\mathbb{P}(\text{yksi tapahtuma } h\text{-pituisella aikavälillä}) = (v + g(h)) \cdot h$,
missä $g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.
- $\mathbb{P}(k > 1 \text{ tapahtumaa } h\text{-pituisella aikavälillä}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

niin $f(k, t) = \frac{e^{-vt}(vt)^k}{k!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, missä $\lambda = vt$.

Esimerkki

Sadasta signaalista keskimäärin yksi muuttuu kanavassa. Kun lähetetään 200 toisistaan riippumatonta signaalia, mikä on todennäköisyys sille että ainakin kolme muuttuu?

Binomijakaumaa käyttäen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) \\ &= 1 - \binom{200}{0} 0,01^0 \cdot 0,99^{200} - \binom{200}{1} 0,01^1 \cdot 0,99^{199} \\ &\quad - \binom{200}{2} 0,01^2 \cdot 0,98^{198} \\ &= 0,323321 \dots\end{aligned}$$

Esimerkki

Poisson-jakaumaa käyttäen: Tässä $p = 0,01$ ja $n = 200$, joten $\lambda = \mathbb{E}(X) = 0,01 \cdot 200 = 2$ ja

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) \\ &= 1 - e^{-2} \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right) \\ &= 1 - e^{-2} (1 + 2 + 2) \\ &= 0,323324 \dots\end{aligned}$$

Esimerkki

Radioaktiivinen hajoaminen noudattaa hyvin edellisen lauseen oletuksia. Yksi gramma radioaktiivisen aineen isotooppia lähettää keskimäärin $3,57 \cdot 10^{10}$ α -hiukkasta sekunnissa. Olkoon X satunnaismuuttuja joka edustaa α -hiukkasten määrää nanosekunnissa. Tällöin $\lambda = \mathbb{E}(X) = 3,57 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9} = 35,7$ ja

$$\mathbb{P}(X = 36) = e^{-35,7} \cdot \frac{35,7^{36}}{36!} = 0,0662533.$$

Lisäksi

$$\mathbb{P}(35 \leq X \leq 37) = e^{-35,7} \left(\frac{35,7^{35}}{35!} + \frac{35,7^{36}}{36!} + \frac{35,7^{37}}{37!} \right) = 0,196989 \dots$$

Huomautus

Poisson-jakaumaa voidaan soveltaa myös tilanteeseen, jossa ajan sijasta tarkastellaan pituutta, pinta-alaa tai tilavuutta.

Esimerkki

Terveellä ihmisellä on noin 6000 valkosolua mm^3 :ssa verta.

Tutkimukseen otetaan $0,001 \text{ mm}^3$ suuruinen verinäyte, josta keskimäärin pitäisi siis löytyä 6 valkosolua.

Määritetään todennäköisyys sille, että terveen ihmisen näytteestä löytyy korkeintaan 2 valkosolua. Tässä $\lambda = 6$, joten

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = e^{-6} \sum_{k=0}^2 \frac{6^k}{k!} = 0,0619688$$

Huomautus

Jos satunnaisesti esiintyvän tapahtuman lukumäärällä X aikavälillä $[0, t]$ on Poisson-jakauma ja aikavälillä $[0, 1]$ esiintyy keskimäärin v tapahtumaa, niin välillä $[0, t]$ esiintyy keskimäärin $\lambda = vt$ tapahtumaa ja satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(n) = e^{-vt} \frac{(vt)^n}{n!}$$

Merkitään ensimmäisen tapahtuman aikaa satunnaismuuttujalla T . Jos aikavälillä $[0, t]$ ei satu yhtään tapahtumaa, on siis $T > t$ ja

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(X = 0) = e^{-vt},$$

josta

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - e^{-vt}$$

Huomautus

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - e^{-vt}$$

on satunnaismuuttujan T kertymäfunktio, josta tiheysfunktio f saadaan derivoimalla:

$$f(t) = \frac{d}{dt}(1 - e^{-vt}) = ve^{-vt}.$$

Määritelmä

Jatkuvalla satunnaismuuttujalla T on eksponenttijakauma, jos sen tiheysfunktio on muotoa $f(t) = ve^{-vt}$ (kun $t \geq 0$).

Tällöin

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{v} \text{ ja } \text{Var}(T) = \frac{1}{v^2}$$

Huomautus

Jos satunnaismuuttujalla on eksponenttijakauma, on

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t_1 + t_2 \mid T > t_1) &= \frac{\mathbb{P}(T > t_1 + t_2)}{\mathbb{P}(T > t_1)} = \frac{e^{-v(t_1+t_2)}}{e^{-vt_1}} = e^{-vt_2} \\ &= \mathbb{P}(T > t_2)\end{aligned}$$

(Muistittomuus).

Esimerkki

Geysir purkautuu keskimäärin 40 minuutin välein ja purkausten väliaika noudattaa eksponenttijakaumaa.

Lasketaan todennäköisyys sille, että juuri tapahtuneen purkauksen jälkeen seuraavaan purkaukseen on ainakin 50 min.

Parametri $\nu = \frac{1}{40}$, ja todennäköisyystiheys $f(t) = \nu e^{-\nu t}$, kun taas kertymäfunktio $\mathbb{P}(T \leq 50) = 1 - e^{-\nu \cdot 50}$.

Tällöin

$$\mathbb{P}(T \geq 50) = 1 - \mathbb{P}(T \leq 50) = 1 - (1 - e^{-\nu \cdot 50}) = 0,2865 \dots$$

Esimerkki

Geysirin edellisestä purkauksesta on 20 minuuttia. Mikä todennäköisyys sille, että seuraavaa saadaan odottaa ainakin 50 minuuttia?

Muistittomuusominaisuuden perusteella

$$\mathbb{P}(T \geq 50 + 20 \mid T \geq 20) = \mathbb{P}(T \geq 50) = 0,2865 \dots$$

Määritelmä

Satunnaismuuttujaa T kutsutaan Poisson-prosessiksi, jos

- T :llä on Poisson-jakauma parametrilla $\lambda = vt$.
- Eri aikaväleillä sattuvat tapaukset ovat riippumattomat.

Huomautus

Edellämainitun perusteella Poisson-prosessin tapahtumien aikavälit noudattavat eksponenttijakaumaa. Parametria v kutsutaan Poisson-prosessin nopeudeksi.