

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 1

Demonstraatio 2, 4.4.2023

1. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ lausekkeella $f(x, y, z) = 3x^2y - 2xz + zy^2$. Arvioi kokonaisdifferentiaalia käyttämällä kuinka paljon funktion f arvo pisteessä $(1, 3, -2)$ muuttuu, mikäli x , y ja z -koordinaateille sallitaan poikkeamat $|dx| \leq 0.1$, $|dy| \leq 0.3$ ja $|dz| \leq 0.2$.

Mallivastaus: Kokonaisdifferentiaali on

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = (6xy - 2z) dx + (3x^2 + 2yz) dy + (-2x + y^2) dz,$$

josta

$$|df| \leq |6xy - 2z| \cdot |dx| + |3x^2 + 2yz| \cdot |dy| + |-2x + y^2| \cdot |dz|$$

ja lukuarvot sijoittamalla saadaan

$$|df| \leq |22| \cdot 0.1 + |-9| \cdot 0.3 + 7 \cdot 0.2 = 7.7$$

2. Laske funktion $f(x, y, z) = 3x^2y - 2xz + zy^2$ suunnattu derivaatta vektorin $\mathbf{u} = (2, 3, 1)$ suuntaan. Mihin suuntaan pisteestä $(1, 3, -2)$ pitäisi siirtyä, jotta funktion arvo kasvaisi nopeimmin ja mikä on suunnatun derivaatan arvo nopeimman kasvun suuntaan?

Mallivastaus: Suunnatun derivaatan laskemiseksi pitää selvittää vektorin $\mathbf{u}$ suuntainen yksikkövektori. Tämä saadaan laskemalla $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, joten yksikkövektori on $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 3, 1)$. Suunnattu derivaatta saadaan gradientin ja yksikkövektorin pistetulona:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f &= \nabla f \cdot \mathbf{v} = (6xy - 2z, 3x^2 + 2yz, -2x + y^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 3, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}(-2x + 9x^2 + 12xy + y^2 - 4z + 6yz). \end{aligned}$$

Nopeimman kasvun suunta on gradientin suunta

$$\nabla f(1, 3, -2) = (22, -9, 7)$$

ja suunnatun derivaatan arvo tähän suuntaan on

$$\nabla f(1, 3, -2) \cdot \frac{\nabla f(1, 3, -2)}{\|\nabla f(1, 3, -2)\|} = (22, -9, 7) \cdot \frac{(22, -9, 7)}{\|(22, -9, 7)\|} = \sqrt{614} = 24,779 \dots$$

3. Olkoon $f(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z)$. Laske $\nabla \cdot f$, kun $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Mallivastaus:

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Derivoimalla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + x \left(-\frac{3}{2}\right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x \\ &= \frac{-3x^2 + x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

Samoin

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

ja

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

joten

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0,$$

kun $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Divergenssiä pisteessä $(0, 0, 0)$ ei voi esittää tavallisena funktiona ja yleensä on tapana käyttää sen esittämiseen ns. δ -piikkiä.

4. Vektorikenttä $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on *pyörteetön*, jos $\nabla \times f = \mathbf{0}$. Onko vektorikenttä $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + 2yz, yz + x, xy - 3z^2)$ pyörteetön?

Mallivastaus: Lasketaan

$$\begin{aligned} & \nabla \times f \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 2yz & yz + x & xy - 3z^2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + x & xy - 3z^2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 2yz & xy - 3z^2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x + 2yz & yz + x \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(x - y) - \mathbf{j}(y - 2y) + \mathbf{k}(1 - 2z) = (x - y, y, 1 - 2z). \end{aligned}$$

Tämä ei ole nollavektori, joten vektorikenttä ei ole pyörteetön.

5. Vektorikenttä $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on *konservatiivinen*, jos f on jonkin skalaarikentän $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gradientti, siis $f = \nabla \phi$. Osoita suoraan laskemalla, että konservatiivinen vektorikenttä on pyörteetön, mikäli funktion ϕ toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Ohje: Jos toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, voidaan osittaisderivoinnin järjestys vaihtaa.

Mallivastaus: $f = \nabla \phi = (\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z})$, joten

$$\begin{aligned} \nabla \times f &= \nabla \times \nabla \phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}) - \mathbf{j}(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x}) + \mathbf{k}(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

6. Onko tehtävän 3 vektorikenttä konservatiivinen? Jos on, mikä on funktio ϕ , jolle $f = \nabla \phi$? Ohje: Yritä ensin ratkaista yhtälö

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

integroimalla x :n suhteen.

Mallivastaus: Integroimalla yhtälö

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

x :n suhteen saadaan

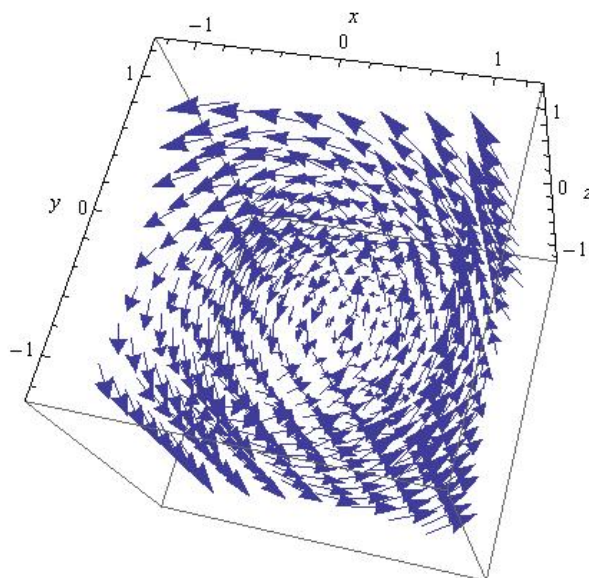
$$\phi = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + C(y, z),$$

missä $C(y, z)$ riippuu ainoastaan y :stä ja z :sta. Suoraan laskemalla voidaan todeta, että valitsemalla $C(y, z) = 0$ saadaan funktio ϕ , joka toteuttaa yhtälön $f = \nabla\phi$.

7. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorikenttä $f(x, y, z) = (-y, x, z)$. Hahmottele vektorikentän kuvaa xy -tasossa valitsemalla muutama piste $(x, y, 0)$ xy -tasolta, määrittämällä näihin liittyvä vektorikentän arvo $(-y, x, 0)$ ja piirtämällä tätä vektoria vastaava suuntajana alkamaan pisteestä $(x, y, 0)$.

Tarkastele pisteestä $\mathbf{p}_0 = (0, 0, z)$ alkavaa ja pisteeseen $\mathbf{p}_1 = (x, y, z)$ päättyvää suuntajanaa ja määritä vektorin $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ kulma vektorikentän $(-y, x, z)$ välillä. Laske lopuksi $\nabla \times (-y, x, z)$ ja tulkitse tulosta.

Mallivastaus:



Kuva 1: Vektorikentän visuaalinen esitys näyttäytyy z -akselin ympärillä olevana pyörteenä. Pyörteen akselin suunta noudattaa ns. oikean käden sääntöä: Jos pyörteen seen ajatellaan tartuttavan oikealla kädellä siten että sormenpäät osoittavat pyörteen suuntaan, on peukalon suunta sama kuin pyörreakselin suuntavektorilla.

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = (x, y, z) - (0, 0, z) = (x, y, 0)$$

ja

$$(x, y, 0) \cdot (-y, x, z) = -xy + xy = 0,$$

mikä merkitsee sitä, että pisteestä $(0, 0, z)$ alkava suuntajana pisteeseen (x, y, z) on kohtisuorassa vektorikenttää vastaan. Vektorikenttä näyttää siis muodostavan pyörteen z -akselin ympärille.

$$\begin{aligned}\nabla \times (-y, x, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} = 2\mathbf{k}\end{aligned}$$

Tulkinta: Vektorikentän pyörre suuntautuu z -akselin suuntaisen yksikkövektorin $\mathbf{k}$ ympäri. Kerroin 2 kuvaa pyörteen voimakkuutta.

8. Tee sijoitus $u = x + y$ ja $v = 2x - y$ ja kirjoita osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 6(x + y)$$

muuttujien u ja v osittaisdifferentiaaliyhtälöksi, ts. osittaisdifferentiaaliyhtälöksi jossa alkuperäisten osittaisderivaattojen sijasta esiintyvät $\frac{\partial f}{\partial u}$ ja $\frac{\partial f}{\partial v}$. Ohje: käytä ketjusääntöä ja esitä sen avulla $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$. Voit käyttää luennolla esitettyä menettelytapaa.

Mallivastaus: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + 2\frac{\partial f}{\partial v}$ ja samoin $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}$. Sijoittamalla nämä ja $x + y = u$ alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2u.$$

(ODY:n ratkaisu: $f(x, y) = (x + y)^2 + h(2x - y)$, missä h on mikä hyvänsä derivoituva yhden muuttujan funktio).

9. Etsi funktion $f(x, y) = 2x^2 - x + y^2 - y$ suurin ja pienin arvo kolmiossa (sisältää reunan), jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1, 0)$. Ohje: suora $y = -x + 1$ kulkee kahden kärkipisteen kautta.

Mallivastaus: Vastaus: Ääriarvot löytyvät joko sisäosasta tai reunoilta.

$$\nabla f(x, y) = (4x - 1, 2y - 1) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

Tämä piste kuuluu sisäosaan, ja $f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$

Tarkastellaan reunaa $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$. Tällä reunalla $f_1(y) = f(0, y) = y^2 - y$. $f'_1(y) = 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$, ja $f(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.

Tarkastellaan reunaa $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$. Tällä reunalla $f_2(x) = f(x, 0) = 2x^2 - x$. $f'_2(x) = 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$, ja $f(\frac{1}{4}, 0) = -\frac{1}{8}$

Tarkastellaan reunaa $y = -x + 1$, $0 \leq x \leq 1$. Tällä reunalla $f_3(x) = 2x^2 - x + (-x + 1)^2 - (-x + 1) = 3x^2 - 2x$. $f'_3(x) = 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ja $f_3(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$.

Tarkastetaan vielä arvot reunojen päätepisteissä (kolmion kärkipisteet): $f(0, 0) = 0$, $f(0, 1) = 0$, $f(1, 0) = 1$.

Näistä huomataan, että funktiolla on suurin arvo 1 ja pienin arvo $-\frac{3}{8}$.