

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Demonstraatio 1, 25.4.2023

1. Olkoon A avaruuden $\mathbb{R}^2$ suorakulmio $A = [0, 2] \times [-1, 1]$. Laske integraali

$$\int_A (x^2 - xy + 3y^2) d\mathbf{x}$$

kahdella eri tavalla.

2. Epähomogeenisen kappaleen massa saadaan integraalina

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

missä $\rho(\mathbf{x})$ on kappaleen tiheys pisteessä $\mathbf{x}$. Oletetaan, että särmiön muotoisen kappaleen $[0, 2] \times [0, 4] \times [0, 5]$ tiheys määräytyy funktion $\rho(x, y, z) = 1 + x + 2y + 3z$ mukaisesti. Määritä kappaleen massa.

3. Olkoon A tason $\mathbb{R}^2$ alue, jota rajoittavat x -akseli, suora $y = 1$ ja käyrä $y = x^2$. Laske integraali

$$\int_A (x + y) d\mathbf{x}.$$

4. Laske integraali

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=y}^1 e^{-x^2} dx dy$$

vaihtamalla ensin integrointijärjestys. Selvitä aluksi mikä on alue, jonka yli integroidaan.

5. Kappaletta V rajoittavat xy , xz ja yz -tasot sekä tasot $2x + y = 2$ ja $z = 1 + y$. Laske kappaleen tilavuus.

6. Laske

$$\int_A \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} d\mathbf{x},$$

missä A on tason $\mathbb{R}^2$ origokeskisen yksikköympyrän osa, jossa $x \geq 0$, $y \geq 0$ (tason I neljännes). Ohje: Käytä napakoordinaatteja.

7. Laske

$$\int_{y=0}^{\sqrt{3}} \int_{x=\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Ohje: Selvitä aluksi mikä on integrointialue ja käytä sitten napakoordinaatteja.

8. Laske sen kappaleen tilavuus, jonka lieriö $x^2 + y^2 = 1$ leikkaa pallosta $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Ohje: Symmetrian vuoksi voit laskea sen kahdeksasosan tilavuuden, jossa $x, y, z \geq 0$. Laske aluksi sisin integraali z :n suhteen ja käytä xy -koordinaattien sijaan napakoordinaatteja.

9. Laske integraali

$$\int_{x=0}^{\frac{1}{2}} \int_{y=x}^{1-x} \left(\frac{x-y}{x+y} \right)^2 dy dx.$$

Ohje: Sijoita $x = \frac{1}{2}(r-s)$, $y = \frac{1}{2}(r+s)$, piirrä alue uusien rajojen selvittämiseksi ja laske sijoitusfunktion Jacobin matriisin determinantti.