

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Demonstraatio 1, 25.4.2023

1. Olkoon A avaruuden $\mathbb{R}^2$ suorakulmio $A = [0, 2] \times [-1, 1]$. Laske integraali

$$\int_A (x^2 - xy + 3y^2) d\mathbf{x}$$

kahdella eri tavalla.

Mallivastaus: Tapa 1:

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^2 \int_{y=-1}^1 (x^2 - xy + 3y^2) dy dx \\ &= \int_{x=0}^2 \int_{y=-1}^1 (x^2 y - \frac{1}{2}xy^2 + y^3) dx \\ &= \int_{x=0}^2 \left((x^2 - \frac{1}{2}x + 1) - (-x^2 - \frac{1}{2}x - 1) \right) dx \\ &= \int_{x=0}^2 (2x^2 + 2) dx = \int_0^2 (\frac{2}{3}x^3 + 2x) = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

Tapa 2:

$$\begin{aligned} & \int_{y=-1}^1 \int_{x=0}^2 (x^2 - xy + 3y^2) dx dy \\ &= \int_{y=-1}^1 \int_{x=0}^2 (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + 3y^2x) dy \\ &= \int_{y=-1}^1 (\frac{8}{3} - 2y + 6y^2) dy \\ &= \int_{y=-1}^1 (\frac{8}{3}y - y^2 + 2y^3) = \frac{28}{3}. \end{aligned}$$

2. Epähomogeenisen kappaleen massa saadaan integraalina

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

missä $\rho(\mathbf{x})$ on kappaleen tiheys pisteessä $\mathbf{x}$. Oletetaan, että särmiön muotoisen kappaleen $[0, 2] \times [0, 4] \times [0, 5]$ tiheys määräytyy funktion $\rho(x, y, z) = 1 + x + 2y + 3z$ mukaisesti. Määritä kappaleen massa.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned}
 m &= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^4 \int_{z=0}^5 (1+x+2y+3z) dz dy dx \\
 &= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^4 \int_0^5 (z+xz+2yz+\frac{3}{2}z^2) dy xy \\
 &= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^4 (5x+10y+\frac{85}{2}) dy dx \\
 &= \int_{x=0}^2 \int_0^4 (5xy+5y^2+\frac{85}{2}y) dx \\
 &= \int_{x=0}^2 (20x+250) dx = \int_0^2 (10x^2+250x) = 540.
 \end{aligned}$$

3. Olkoon A tason $\mathbb{R}^2$ alue, jota rajoittavat x -akseli, suora $x=1$ ja käyrä $y=x^2$.
Laske integraali

$$\int_A (x+y) d\mathbf{x}.$$

Mallivastaus: Integraali voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}
 \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{x^2} (x+y) dy dx &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{x^2} (xy + \frac{1}{2}y^2) dx \\
 &= \int_0^1 (x^3 + \frac{1}{2}x^4) dx \\
 &= \int_0^1 (\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5) = \frac{7}{20}.
 \end{aligned}$$

4. Laske integraali

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=y}^1 e^{-x^2} dx dy$$

vaihtamalla ensin integrointijärjestys. Selvitä aluksi mikä on alue, jonka yli integroidaan.

Mallivastaus: Alue voidaan käydä läpi myös antamalla ensin x :n kulkea väli $[0, 1]$ ja sitten y :n väli $[0, x]$, jolloin integraaliksi saadaan

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x e^{-x^2} dy dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \int_0^1 -\frac{1}{2} e^{-x^2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}).$$

5. Kappaletta V rajoittavat xy , xz ja yz -tasot sekä tasot $2x+y=2$ ja $z=1+y$.
Laske kappaleen tilavuus.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned}
 \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{2-2x} \int_{z=0}^{1+y} dz dy dx &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{2-2x} (1+y) dy dx \\
 &= \int_{x=0}^1 \int_0^{2-2x} (y + \frac{1}{2}y^2) dx = \int_{x=0}^1 (2-2x + \frac{1}{2}(2-2x)^2) dx \\
 &= \int_0^1 (2x^2 - 6x + 4) dx = \int_0^1 (\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x) = \frac{5}{3}.
 \end{aligned}$$

6. Laske

$$\int_A \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} d\mathbf{x},$$

missä A on tason $\mathbb{R}^2$ origokeskisen yksikköympyrän osa, jossa $x \geq 0$, $y \geq 0$ (tason I neljännes). Ohje: Käytä napakoordinaatteja.

Mallivastaus: Napakoordinaatteja käyttämällä kysytty integraali saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4-r^2}} r d\theta dr &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{4-r^2}} dr = \frac{\pi}{2} \Big|_0^1 -\sqrt{4-r^2} \\ &= \frac{\pi}{2} (2 - \sqrt{3}) = \pi \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

7. Laske

$$\int_{y=0}^{\sqrt{3}} \int_{x=\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Ohje: Selvitä aluksi mikä on integrointialue ja käytä sitten napakoordinaatteja.

Mallivastaus: Integrointialue on origokeskisen, 2-säteisen ympyrän sektori $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, joten integraaliksi saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} \int_{r=0}^2 e^{-r^2} r dr d\theta &= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} \Big|_0^2 -\frac{1}{2} e^{-r^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{2} e^{-4} + \frac{1}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{6} (1 - e^{-4}). \end{aligned}$$

8. Laske sen kappaleen tilavuus, jonka lieriö $x^2 + y^2 = 1$ leikkaa pallosta $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Ohje: Symmetrian vuoksi voit laskea sen kahdeksasosan tilavuuden, jossa $x, y, z \geq 0$. Laske aluksi sisin integraali z :n suhteen ja käytä xy -koordinaattien sijaan napakoordinaatteja.

Mallivastaus: Kysytyn tilavuuden kahdeksasosa voidaan määrittää integraalina

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=0}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz dy dx = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{2-x^2-y^2} dy dx.$$

Napakoordinaattisijoituksella tästä saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^1 \sqrt{2-r^2} r dr d\theta &= \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^1 \sqrt{2-r^2} r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \Big|_0^1 -\frac{1}{3} (2-r^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{6} (\sqrt{8}-1) = \frac{\pi}{6} (2\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

Kysytty tilavuus on siis kahdeksankertainen saatuun lausekkeeseen nähden.

9. Laske integraali

$$\int_{x=0}^{\frac{1}{2}} \int_{y=x}^{1-x} \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 dy dx.$$

Ohje: Sijoita $x = \frac{1}{2}(r-s)$, $y = \frac{1}{2}(r+s)$, piirrä alue uusien rajojen selvittämiseksi ja laske sijoitusfunktion Jacobin matriisin determinantti.

Mallivastaus: Suora $y = x$ korvautuu r -akselilla ja suora $y = -x$ s -akselilla ja integroitirajoiksi saadaan $r \in [0, 1]$ ja $s \in [0, r]$. Lisäksi $J_g(r, s) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$.

Tällöin integraali muuntuu muotoon

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^1 \int_{s=0}^r \left(\frac{-s}{r}\right)^2 \frac{1}{2} ds dr &= \int_{r=0}^1 \frac{1}{r^2} \left(\int_0^r \frac{1}{6} s^3 \right) dr \\ &= \frac{1}{6} \int_{r=0}^1 r dr = \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$