

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Demonstraatio 2, 2.5.2023

1. Laske käyräintegraali

$$\int_{\gamma} xy \, dx - y^2 \, dy,$$

kun γ on

a) Jana pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(2, 1)$. b) Paraabelin kaari $y = \frac{1}{4}x^2$ pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(2, 1)$.

2. Laske edellisen tehtävän käyräintegraali, kun γ on

a) Murtoviiva $(0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (2, 1)$. b) Käyrä $(x(t), y(t)) = (2t^3, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

3. Osoita, että vektorikenttä

$$F(x, y, z) = (2xy - z^3, x^2, -3xz^2 - 1)$$

on konservatiivinen etsimällä sille potentiaali V .

4. Laske edellisen tehtävän vektorikentälle käyräintegraali

$$\int_{\gamma} F \cdot d\mathbf{x},$$

kun γ on murtoviiva $(0, 0, 0) \rightarrow (a, 0, 0) \rightarrow (a, b, 0) \rightarrow (a, b, c)$ **käyttämättä potentiaalifunktiota**. Ohje: Ensimmäinen osa voidaan parametrisoida esim $(x, y, z) = (t, 0, 0)$, missä $t \in [0, a]$, toinen $(x, y, z) = (a, t, 0)$, missä $t \in [0, b]$ ja kolmas $(x, y, z) = (a, b, t)$, missä $t \in [0, c]$.

5. Laske pinnan $\mathbf{r}(u, v) = (u^2 + v^2, 2u, v)$ sen osan ala, joka muodostuu, kun (u, v) käy läpi ellipsin $(2r \cos \theta, r \sin \theta)$, missä $r \in [0, 1]$ ja $\theta \in [0, 2\pi]$
6. Olkoon $f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$. Kun käyrä $y = f(x)$ pyörähtää x -akselin ympäri, syntyy ns. pyörähdyskappale. Leikataan pyörähdyskappaletta tasoilla $x = x_0$ ja $x = x_0 + dx$. Esitä approksimaatio leikatun viipaleen tilavuudelle ja integraalilauseke koko pyörähdyskappaleen tilavuudelle. Ohje: Leikattu viipale voidaan approksimoida ympyrälieriöksi, joka korkeus on dx ja pohjan säde $f(x)$.
7. Esitä approksimaatio edellisessä tehtävässä leikatun viipaleen reunan pinta-alalle ja integraalilauseke koko kappaleen vaipan alalle. Ohje: reunan leveyttä approksimoi $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Mikä on reunakäyrän pituus?
8. Olkoon $M > 1$ ja $f(x) = \frac{1}{x}$ välillä $[1, M]$ määritelty funktio. Määritä tilavuus ja vaipan pinta-ala kappaleelle, joka syntyy kun käyrä $y = f(x)$ pyörähtää x -akselin ympäri. Vaipan pinta-alaa kuvaavaa integraalilauseketta ei tarvitse laskea mikäli se osoittautuu hankalaksi.
9. Arvioi edellisen tehtävän pyörähdyskappaleen tilavuuden ja pinta-alan käyttymistä kun $M \rightarrow \infty$.