

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Demonstraatio 2, 2.5.2023

1. Laske käyräintegraali

$$\int_{\gamma} xy \, dx - y^2 \, dy,$$

kun γ on

a) Jana pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(2, 1)$. b) Paraabelin kaari $y = \frac{1}{4}x^2$ pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(2, 1)$.

Mallivastaus: a) Jana on osa suoraa $y = \frac{1}{2}x$, joten $dy = \frac{1}{2}dx$ ja käyräintegraaliksi saadaan

$$\int_0^2 x \cdot \frac{1}{2}x \, dx - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \frac{1}{2} \, dx = \int_0^2 \frac{3}{8}x^2 \, dx = \left/ \frac{1}{8}x^3 \right|_0^2 = 1.$$

b) Paraabelin kaarella on $dy = \frac{1}{2}x \, dx$ ja käyräintegraaliksi saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \frac{1}{4}x^2 \, dx - \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 \frac{1}{2}x \, dx &= \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{32}x^5\right) \, dx \\ &= \left/ \left(\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{6 \cdot 32}x^6\right) \right|_0^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2. Laske edellisen tehtävän käyräintegraali, kun γ on

a) Murtoviiva $(0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (2, 1)$. b) Käyrä $(x(t), y(t)) = (2t^3, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

Mallivastaus: a) Välillä $(0, 0) \rightarrow (0, 1)$ voidaan valita parametriesitykseksi $(x, y) = (0, t)$, missä $t \in [0, 1]$. Tällä osalla $dx = 0$ ja $dy = dt$, joten käyräintegraalin osaksi saadaan

$$\int_0^1 -t^2 \, dt = -\left/ \frac{1}{3}t^3 \right|_0^1 = -\frac{1}{3}.$$

Välin $(0, 1) \rightarrow (2, 1)$ parametriesitykseen taas voidaan valita $(x, y) = (t, 1)$, $t \in [0, 2]$. Tällöin $dx = dt$ ja $dy = 0$ ja käyräintegraalin toiseksi osaksi saadaan

$$\int_0^2 t \, dt = \left/ \frac{1}{2}t^2 \right|_0^2 = 2.$$

koko käyräintegraalin arvoksi saadaan siis $2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

b) Käyrällä on $dx = 6t^2 \, dt$ ja $dy = 2t \, dt$, joten käyräintegraalin arvoksi saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^1 2t^3 \cdot t^2 \cdot 6t^2 \, dt - (t^2)^2 \cdot 2t \, dt &= \int_0^1 (12t^7 - 2t^5) \, dt \\ &= \left/ \left(\frac{3}{2}t^8 - \frac{1}{3}t^6\right) \right|_0^1 = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

3. Osoita, että vektorikenttä

$$F(x, y, z) = (2xy - z^3, x^2, -3xz^2 - 1)$$

on konservatiivinen etsimällä sille potentiaali V .

Mallivastaus: Koska $\frac{\partial V}{\partial x} = 2xy - z^3$, on $V = x^2y - xz^3 + g(y, z)$, missä $g(y, z)$ ei riipu x :stä. Vaatimus $\frac{\partial V}{\partial y} = x^2$ puolestaan kertoo, että $\frac{\partial}{\partial y}g(y, z) = 0$, joten $g(y, z) = h(z)$, missä h ei riipu x :stä eikä y :stä. Lopuksi ehdosta $\frac{\partial V}{\partial z} = -3xz^2 - 1$ seuraa, että $h'(z) = -1$, joten siis $h(z) = -z + C$, missä C on vakio. Näin ollen $V(x, y, z) = x^2y - xz^3 - z + C$.

4. Laske edellisen tehtävän vektorikentälle käyräintegraali

$$\int_{\gamma} F \cdot d\mathbf{x},$$

kun γ on murtoviiva $(0, 0, 0) \rightarrow (a, 0, 0) \rightarrow (a, b, 0) \rightarrow (a, b, c)$ **käyttämättä potentiaalifunktiota**. Ohje: Ensimmäinen osa voidaan parametrisoida esim $(x, y, z) = (t, 0, 0)$, missä $t \in [0, a]$, toinen $(x, y, z) = (a, t, 0)$, missä $t \in [0, b]$ ja kolmas $(x, y, z) = (a, b, t)$, missä $t \in [0, c]$.

Mallivastaus: 1. välillä $dx = dt$ ja $dy = dz = 0$, joten tätä osaa vastaava käyräintegraali on

$$\int_0^a (2t \cdot 0 - 0^3) dt = 0.$$

2. välillä on $dy = dt$ ja $dx = dz = 0$, joten tätä väliä vastaava käyräintegraali on

$$\int_0^b a^2 dt = a^2 b.$$

3. välillä $dz = dt$, kun taas $dx = dy = 0$ ja integraali on

$$\int_0^c (-3at^2 - 1) dt = \left[-at^3 - t \right]_0^c = -ac^3 - c.$$

Koko käyräintegraaliksi saadaan siis $a^2b - ac^3 - c$.

5. Laske pinnan $\mathbf{r}(u, v) = (u^2 + v^2, 2u, v)$ sen osan ala, joka muodostuu, kun (u, v) käy läpi ellipsin $(2r \cos \theta, r \sin \theta)$, missä $r \in [0, 1]$ ja $\theta \in [0, 2\pi]$

Mallivastaus: $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (2u, 2, 0)$ ja $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (2v, 0, 1)$, mistä

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (2, -2u, -4v)$$

ja

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = 2\sqrt{1 + u^2 + 4v^2}.$$

Tällöin kysytty pinta-ala on

$$2 \iint_{(u,v) \in E} \sqrt{1 + u^2 + 4v^2} du dv,$$

missä E on tehtävänannossa kuvailtu ellipsi. Sijoittamalla integraaliin $u = 2r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$ saadaan jacobin matriisin determinantiksi $2r$. Näin ollen

sijoitus antaa muodon

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \sqrt{1 + 4r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \sin^2 \theta} \, 2r \, dr \, d\theta \\
 &= 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr \, d\theta = 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (5\sqrt{5} - 1) \, d\theta = \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1).
 \end{aligned}$$

6. Olkoon $f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$. Kun käyrä $y = f(x)$ pyörähtää x -akselin ympäri, syntyy ns. pyörähdyskappale. Leikataan pyörähdyskappaletta tasoilla $x = x_0$ ja $x = x_0 + dx$. Esitä approksimaatio leikatun viipaleen tilavuudelle ja integraalilauseke koko pyörähdyskappaleen tilavuudelle. Ohje: Leikattu viipale voidaan approksimoida ympyrälieriöksi, joka korkeus on dx ja pohjan säde $f(x)$.

Mallivastaus: Leikattu viipale on ympyrälieriö, jonka korkeus on dx , pohjan säde $f(x)$, joten sen tilavuus on $dV = \pi \cdot f(x)^2$. Pyörähdyskappaleen tilavuudeksi saadaan siis

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

7. Esitä approksimaatio edellisessä tehtävässä leikatun viipaleen reunan pinta-alalle ja integraalilauseke koko kappaleen vaipan alalle. Ohje: reunan leveyttä approksimoi $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Mikä on reunakäyrän pituus?

Mallivastaus: Reunakäyrän pituus on $2\pi f(x)$ ja siis sen pinta-ala

$$dA = 2\pi f(x) \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Pyörähdyskappaleen vaipan pinta-alaksi saadaan tämän mukaan

$$\begin{aligned}
 A &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
 &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.
 \end{aligned}$$

8. Olkoon $M > 1$ ja $f(x) = \frac{1}{x}$ välillä $[1, M]$ määritelty funktio. Määritä tilavuus ja vaipan pinta-ala kappaleelle, joka syntyy kun käyrä $y = f(x)$ pyörähtää x -akselin ympäri. Vaipan pinta-alaa kuvaavaa integraalilauseketta ei tarvitse laskea mikäli se osoittautuu hankalaksi.

Mallivastaus: Tilavuus on

$$V = \pi \int_1^M \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^M = \pi \left(1 - \frac{1}{M}\right)$$

Pinta-ala puolestaan on

$$A = 2\pi \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

Viimeisimmän integraalin eksakti määrittäminen on mahdollista, mutta työstä.

9. Arvioi edellisen tehtävän pyörähdyskappaleen tilavuuden ja pinta-alan käyttymistä kun $M \rightarrow \infty$.

Mallivastaus: Kappaleen tilavuus pysyy rajoitettuna:

$$V = \pi\left(1 - \frac{1}{M}\right) < \pi,$$

joskin

$$V = \pi\left(1 - \frac{1}{M}\right) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \pi$$

Pinta-alan lauseketta voidaan arvioida seuraavasti:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + 0} dx \\ &= 2\pi \int_1^M \frac{1}{x} dx = 2\pi \left[\ln x \right]_1^M = 2\pi \ln M. \end{aligned}$$

Tämä lauseke ei pysy rajoitettuna, vaan

$$A = 2\pi \ln M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \infty.$$

Mietittävää: Miten on mahdollista että kappaleen tilavuus pysyy rajoitettuna, mutta sen pinta-ala kasvaa ilman mitään rajaa? Jos esimerkiksi valmistettaisiin tehtävissä kuvattu kappale, sen täyttäminen maalilla onnistuisi aina π tilavuusyksiköllä, mutta luvun M kasvaessa pinnan maalaaminen vaatisi aina vain enemmän maalia, koska pinta-ala $A \rightarrow \infty$ kun $M \rightarrow \infty$.

Miten siis on mahdollista, että kappaleen (olipa M miten suuri hyvänsä) täyteen voi kaataa rajoitetulla määrällä maalia, mutta pinnan maalaamiseen ei riitä mikään määrä, kun $M \rightarrow \infty$?