

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktiot 2

Demonstraatio 3, 9.5.2023

1. Laske kartion $x^2 + y^2 = z^2$ sen osan ala, joka on ympyrän $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ yläpuolella.

Mallivastaus: kartion yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $G(x, y, z) = 0$, missä $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ja siis

$$dA = \frac{||\nabla G||}{\left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|} = \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}{|2z|} = \frac{2\sqrt{2z^2}}{2|z|} = \sqrt{2}.$$

Kts. Luentomonisteen huomautus 14, mutta voidaanko tämä saada myös jollain toisella tavalla? Näin ollen kysytty pinta-ala on

$$\iint_{(x,y) \in B} \sqrt{2} \, dx \, dy,$$

missä B on ympyrä $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Täten integraalin arvo (ja kysytty ala) on $\pi\sqrt{2}$, sillä integraali

$$\iint_{(x,y) \in B} dx \, dy$$

esittää ympyrän B alaa ($=\pi \cdot 1^2$).

2. Laske vektorikentän $(2x, y^2, z^2)$ pintaintegraali yli yksikköpallon $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ pinnan. Ohje: Käytä divergenssilauseetta.

Mallivastaus: Divergenssilauseen mukaan pintaintegraali on sama kuin vektorikentän divergenssin yli kappaleen, siis

$$\int_B \nabla \cdot (2x, y^2, z^2) = \int_B (2 + 2y + 2z),$$

missä B on yksikköpallo $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Tämän integraalin laskemiseksi hajotetaan integrandi osiin:

$$\int_B (2 + 2y + 2z) = \int_B 2 + \int_B 2y + \int_B 2z.$$

Tarkastellaan ensin ensimmäistä integraalia, jossa integrandi on vakio. Tällöin integraalin arvoksi saadaan

$$\int_B 2 = 2 \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3},$$

koska yksikköpallon tilavuus on $\frac{4\pi}{3}$. Hajotetaan seuraava integraali kahden yksikköpallon puolikkaaksi $B_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \mid y \leq 0\}$ ja $B_2 = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \mid y \geq 0\}$ jolloin

$$\int_{B_2} y = \int_{B_1} 2y + \int_{B_2} 2y$$

ja sijoituksella jälkimmäiseen integraaliin $y = -y_1$ huomataan, että $\int_{B_1} 2y = -\int_{B_2} 2y$ (tarkista), siis funktion $2y$ integraali yli yksikköpallon on 0. Samoin voidaan huomata, että viimeisimmän integraalin arvo yli yksikköpallon on 0. Näin ollen tehtävässä kysytyn integraalin arvo on $\frac{8\pi}{3}$.

Tulkintaa: Jaettaessa yksikköpallo kahtia tason $y = 0$ halki saa funktion $2y$ täsmälleen vastakkaiset merkit kun $y > 0$ ja kun $y < 0$. Näin ollen vastaavat integraalit kumoavat toisensa.

3. Laske vektorikentän (x^2, y^2, x^2) pintaintegraali yli kappaleen $\{(x, y, z)\} \in [0, 3] \times [-2, 2] \times [0, 2\pi]$. Ohje: Käytä divergenssilauseetta.

Mallivastaus: Jos merkitään $I = [0, 3] \times [-2, 2] \times [0, 2\pi]$, on divergenssilauseen perusteella kysytty pintaintegraali on sama kuin integraali

$$\begin{aligned} & \int_I \nabla \cdot (x^2, y^2, x^2) = \int_I (2x + 2y) \\ &= \int_{x=0}^3 \int_{y=-2}^2 \int_{z=0}^{2\pi} (2x + 2y) dz dy dx \\ &= 2\pi \int_{x=0}^3 \int_{y=-2}^2 (2x + 2y) dy dx \\ &= 2\pi \int_{x=0}^3 \left/ \right._{-2}^2 (2xy + y^2) dx \\ &= 2\pi \int_{x=0}^3 8x dx = 2\pi \left/ \right._{0}^3 4x^2 = 64\pi. \end{aligned}$$

4. Olkoon S origokeskinen r -säteinen ympyräpinta. Oletetaan, että tämän pinnan sisällä oleva kokonaisvaraus on Q , jolloin Maxwellin yhtälöiden mukaan pitäisi olla

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

missä ϵ_0 on vakio ja $\mathbf{E}$ on sähkökenttä. Millainen on sähkökentän $\mathbf{E}$ lauseke?

Ohje: Integrandi $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ on vakio, kun $\mathbf{r}$ edustaa etäisyyttä origosta.

Mallivastaus: Kun integroitavaksi alueeksi valitaan origokeskinen r -säteinen pinta, jonka sisään varaus jää, on integraalin arvo laskettavissa seuraavasti:

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dA,$$

missä $\mathbf{n}$ on r -säteisen pallonpinnan normaalivektori. Koska $\mathbf{E}\mathbf{r}$ oletetaan etäisyydellä r vakioksi (merkitään $E(r)$), on viimeisin integraali yhtä suuri kuin pallon pinnan ala kertaa $E(r)$, siis

$$4\pi r^2 E(r).$$

Täten siis $\frac{Q}{\epsilon_0} = 2\pi r^2 E(r)$, josta $E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$. Sähkökenttä siis suuntautuu kohtisuoraan pois varauksesta ja on itseisarvoltaan kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön.