

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktio 2

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Lähtökohta: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

- Avaruuden $\mathbb{R}^n$ (kompakti) väli:
 $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots [a_n, b_n]$.
- Geometrinen mitta $\mu(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$.
- Välin $[a_i, b_i]$ jako $D_i \rightarrow$ välin I jako $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$
($k = k_1 \cdot \dots \cdot k_n$) kpl.
- Merkintä: $m_i = \inf_{\mathbf{x} \in I_i} f(\mathbf{x})$, $M_i = \sup_{\mathbf{x} \in I_i} f(\mathbf{x})$.
- Alasumma $\underline{S}_D = \sum_{i=1}^k m_i \mu(I_i)$
- Yläsumma $\overline{S}_D = \sum_{i=1}^k M_i \mu(I_i)$.

Riemann-integraali

Jos jakoa tihentämällä saadaan $\overline{S}_D - \underline{S}_D < \epsilon$ ja $\underline{S}_D \leq S \leq \overline{S}_D$ jokaiselle $\epsilon > 0$, sanotaan, että $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva ja merkitään

$$S = \int_I f = \int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Määritelmä

- Suorakulmaisille alueille (väleille) I integraali $\int_I f$ määritellään edellä kuvailtujen ylä- ja alasummien yhteisenä raja-arvona.
- Ei-suorakulmaisille alueille A määritellään

$$f_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{jos } \mathbf{x} \in A, \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$

sekä valitsemalla jokin joukon A sisältävä suorakulmainen alue (väli) I ja määrittelemällä

$$\int_A f = \int_I f_A.$$

Nollamittaisuus

Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on (Lebesgue-)nollamittainen jos se voidaan peittää numeroituvallla määrällä $I_1, I_2, I_3, \dots$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ välejä, joiden yhteenlaskettu mitta saadaan miten lähelle nollaa hyvänsä.

Lause

Jos $m < m$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on differentioituva, on $f(U)$ nollamittainen.

Esimerkit 32–33

Lause

Jos $I \subseteq \mathbb{R}^n$ on kompakti väli ja $f_I \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu. Tällöin f on (Riemann)integroituva välin I yli tarkalleen silloin kun f :n epäjatkuvuuskohtien joukko on nollamittainen.

Jordan-mitta

Jos vakiofunktio $f(\mathbf{x}) = 1$ on integroituva yli joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$, sanotaan että A on Jordan-mitallinen ja

$$\mu(A) = \int_A d\mathbf{x}.$$

$n = 1$: pituus, $n = 2$: pinta-ala, $n = 3$: tilavuus.

Lause

Jos $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on rajoitettu ja $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ integroituvia, on

- $\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$
- Jos $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ joukossa A , on $\int_A f \leq \int_A g$
- $|f|$ on integroituva ja $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

Lause

Olkoon f integroituva yli joukkojen A_1 ja A_2 , joille $A_1 \cap A_2$ on nollamittainen. Tällöin f on integroituva yli joukon $A = A_1 \cup A_2$

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$$

Fubinin lause

Olkoon $I = I_1 \times I_2$. Tällöin riittävän säännöllisyysoletuksin

$$\int_I f = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}$$

Erikoistapaus

$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{y})$, jolloin

$$\int_I f = \int_{I_1} f_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{I_2} f_2(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Esimerkkejä

Esimerkit 34–37