

Insinöörimatematiikka: Usean muuttujan funktio 2

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Käyrä

Käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on funktio $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, missä $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Merkitään

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

Käyrä on *sileä*, mikäli derivaatat $\gamma'_i(t)$ ovat jatkuvia.

Käyrän pituus

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}$$

Käyrän pituus

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} \sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \dots + \gamma'_n(t)^2} dt \end{aligned}$$

Esimerkkejä

J. Lahtonen: Esimerkit 5.6 ja 5.7.

Käyräintegraali

Tangentti

Käyrän γ tangentin suuntavektori:

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

Vektorikentän käyräintegraali

Voimavektori $\mathbf{F}$, suuntavektori $\mathbf{s}$, projektion avulla työ $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$

Määritelmä

Olkoon $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sileä käyrä. Vektorikentän $\mathbf{F}$ käyräintegraali käyrää γ pitkin määritellään

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Merkintä

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$$

Esimerkkejä

Esimerkit 44 ja 45, J. Lahtonen: Esim. 5.11

Ominaisuuksia

- $\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$
- $\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{-\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}.$
- $\int_{\gamma} (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{x} = \alpha \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} + \beta \int_{\gamma} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x}$