Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2023

Demonstraatio 1, 26.9.2023

1. Olkoon $f(x) = 4x + 1$. Laske etäisyys $d(f(x), f(3))$ ja ilmoita se lausekkeella, joka sisältää etäisyyden $d(x, 3)$. Miten $d(f(x), f(3))$ ja $d(x, 3)$ suhtautuvat toisiinsa?

   Mallivastaus:

   $$d((f(x), f(3)) = |4x + 1 - 13| = 4\,|x - 3| = 4d(x, 3).$$

   Arvon $f(x)$ etäisyys arvoon $f(3)$ on siis nelinkertainen etäisyyteen $d(x, 3)$ verrattuna.

2. Olkoon $f(x) = 2x^2$. Laske etäisyys $d(f(x), f(3))$ ja ilmoita se lausekkeella, joka sisältää etäisyyden $d(x, 3)$. Jos vielä rajoitetaan muttujaa x siten, että $x \in (2, 4)$, miten $d(x, 3)$ silloin rajoittaa etäisyyttä $d(f(x), f(3))$?

   Mallivastaus:

   $$d(f(x), f(3)) = \left|2x^2 - 18\right| = 2\left|x^2 - 9\right| = 2\,|x - 3|\,|x + 3| = 2\,|x + 3|\,d(x, 3).$$

   Jos $x < 4$, on $|x + 3| < 7$, joten

   $$d(f(x), f(3)) = 2\left|x^2 - 9\right| < 2 \cdot 7\,|x - 3| = 14d(x, 3)$$

3. Jos edellisen tehtävän rajoitetta $x \in (2, 4)$ tiukennetaan muotoon $x \in (2.9, 3.1)$, miten $d(x, 3)$ silloin rajoittaa tehtävässä kysyttyä etäisyytät?

   Mallivastaus: Tälloin

   $$d(f(x), f(3)) = 2\,|x + 3|\,d(x, 3) \leq 12.2d(x, 3)$$

4. Jos x on lähellä lukua 5, on $\frac{1}{x}$ ilmeisesti lähellä lukua $\frac{1}{5}$. Esitä etäisyydelle $d(\frac{1}{x}, \frac{1}{5})$ lauseke, jossa esiintyy myös $d(x, 5)$. Ohje: Määritelmät ja laventaminen.

   Mallivastaus:

   $$d(\frac{1}{5}, \frac{1}{x}) = \left|\frac{1}{5} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x}{5x} - \frac{5}{5x}\right| = \frac{1}{5\,|x|}d(x, 5).$$

5. Osoita, että $x^3 - 10x^2 + 1$ saadaan suuremmaksi kuin mikä tahansa ennalta annettu luku $M > 0$, kunhan x valitaan riittävän suureksi.

   Vihje: Kunhan $x > 1$, on $x^3 - 10x^2 + 1 > x^3(1 - \frac{10}{x})$ (miksi?). Tämän jälkeen voidaan todeta, että $1 - \frac{10}{x} \geq \frac{1}{2}$ kunhan x on riittävän suuri (kuinka suuri?) Miten saadaan lopullinen johtopäätös?

   Mallivastaus: Kun $x \geq 20$, on

   $$1 - \frac{10}{x} \geq \frac{1}{2}$$

   Miksi? ja siten

   $$x^3 - 10x^3 + 1 > \frac{1}{2}x^3 > \frac{1}{2}x > M,$$

   siis kun $x > \max\{20, 2M\}$, $x^3 - 10x^2 + 1 > x > M$.

Huomautus: Lausekkeelle $1 - \frac{10}{x}$ valittu alaraja $\frac{1}{2}$ on periaatteessa mielivaltainen: Se tulee valita positiiviseksi, ja on selvää että positiivisilla x:n arvoilla $1 - \frac{10}{x} < 1$, joten ykköstä suurempi alaraja ei tule kysymykseen. $\frac{1}{2}$ on eräänlainen "kompromissi" (keskimmäinen luku väliltä $(0, 1)$). Olisi kuitenkin voitu valita mikä hyvänsä $C \in (0, 1)$ ja selvittää milloin $1 - \frac{10}{x} > C$.

6. Selvitä miten $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$ käyttäytyy kun $x \to 2$. Onko mahdollisesti raja-arvo

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

olemassa?

Mallivastaus: Kun $x = 2$, saa osoittaja arvon 0. Voidaan havaita että $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, jolloin

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)} = \lim_{x \to 2} x - 3 = -1,$$

7. Määritä derivaattafunktio $f'(x)$, kun $f(x) = \sin^2 x + 2x + 1$.

Mallivastaus:

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2.$$

8. Selvitä funktion $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ derivaattafunktio käyttämällä osamäärän derivointisääntöä. Vastaus: $D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, mutta miten?

Mallivastaus: Osamäärän derivointisäännön perusteella

$$D \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Toisaalta

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

9. Käytetään funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ käänteisfunktiosta merkintää arctan. Sovella yhtälöön

$$\arctan(\tan x) = x$$

ketjusääntöä, merkitse $y = \tan x$ ja päättele mitä on $D \arctan y$.

Mallivastaus: Ketjusäännön perusteella

$$D \arctan(\tan x) D \tan x = 1,$$

mikä voidaan myös kirjoittaa muotoon

$$D \arctan(\tan x)(1 + \tan^2 x) = 1,$$

mistä merkitsemällä $y = \tan x$ ja jakamisella seuraa

$$D \arctan(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Näin ollen siis arkustangentin derivointisääntö saa (vaihtamalla y x:ksi) muodon

$$D \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$