

Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2023

Demonstraatio 2, 3.10.2023

1. Olkoon $f(x) = x^5 + x^3 - 3$. Perustele miksi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on bijektio. Määritä $Df^{-1}(-1)$. Ohje: Käytä käänteisfunktion derivointisääntöä. On selvítettävä sellainen x , jolla $f(x) = -1$ (miksi?) Kokeile joitain lukuarvoja tämän yhtälön ratkaisemiseksi.

2. Yhtälö

$$x^3y - 5xy^2 + 4y^3 = 14$$

määrittelee jossakin pisteen $(x, y) = (1, 2)$ ympäristössä derivoituvan funktion $y = f(x)$. Totea että piste $(1, 2)$ kuuluu käyrälle ja määritä $f'(1)$.

3. Parametrimuoto $\{(t^3 - 2t + 3, t^2 + 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$ määrittelee jossakin pisteen $(x, y) = (7, 7)$ ympäristössä derivoituvan funktion $y = f(x)$. Määritä $f'(7)$.

4. Olkoon $f(x, y) = x^3y - 5xy^2 + 4y^3 - 14$. Laske $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

5. Olkoon $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Määritä $f^{(n)}(x)$ kun $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

6. Määritä $\int x^2 \ln x \, dx$. Vihje: Osittaisintegrointi.

7. Määritä $\int \cos^2 x \, dx$. Vihje: Voit käyttää sopivaa trigonometrista kaavaa, mutta muitakin keinoja on.

8. Määritä $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$ käyttämällä sijoitusta $x = \sin t$.

9. Määritä $\int \frac{1}{(x+2)(x-3)} \, dx$. Vihje: Etsi aluksi sellaiset luvut A ja B että

$$\frac{1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}.$$