Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2023

Demonstraatio 3, 10.10.2023

1. Määritä raja-arvo $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}$. Ohje: L'Hospitalin sääntö.

   Mallivastaus:

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} 2x - 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}(4x^2+2) - 2}{12x^2} \\ = & \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} 2x(4x^2+2) + e^{x^2} 8x}{24x^2} \\ = & \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}(8x^3+12x)}{24x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}(8x^2+12)}{24} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Newtonin gravitaatiolain mukaan kahden kappaleen välillä vallitsee vetovoima joka on suoraan verrannollinen kappaleiden massoihin m ja M sekä kääntäen verrannollinen etäisyyden r neliöön:

$$F = G\frac{mM}{r^2},$$

   missä verrannollisuuskerroin G on ns. gravitaatiovakio. Käytä luennolla esitettyä lineaarista approksimaatiota arvioidaksesi kuinka monta prosenttia maan vetovoima kiertoradalla 360 km korkeudella olevalla avaruusasemalla on maan pinnalla vallitsevasta vetovoimasta. Maan säteeksi arvioidaan 6400 km.

   Vihje: Merkitse maan sädettä esim. symbolilla R. Avaruusaseman etäisyyttä maan keskipisteestä voidaan merkitä $R + \Delta R$.

   Mallivastaus: Prosentuaalinen osuus maan vetovoimasta kiertoradalla on $\frac{F+\Delta F}{F} = 1 + \frac{\Delta F}{F}$, missä

$$\Delta F = F(R+\Delta R) - F(R) \approx F'(R)\Delta R = -2G\frac{mM}{R^3}\Delta R = -2F(R)\frac{\Delta R}{R},$$

   siis

$$\frac{\Delta F}{F} = -2\frac{\Delta R}{R} = -\frac{9}{80} = -0.1125$$

   ja

$$1 + \frac{\Delta F}{F} = 1 - 0.1125 = 0.8875.$$

3. Etsi differentiaaliyhtälölle $y' = 3y$ ratkaisu, jolle $y(0) = 1$. Vihje: Luentoesimerkki.

   Mallivastaus:

$$y' = 3y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 3 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\ln|y| = 3,$$

   josta $\ln|y| = 3x + C$ ja edelleen $|y| = e^C e^{3x}$. Sijoittamalla $x = 0$ saadaan $1 = e^C$. Koska eksponenttifunktio on aina positiivinen, voidaan päätellä että $y = e^{3x}$.

4. Etsi differentiaaliyhtälölle $yy' = 3$ ratkaisu, jolle $y(0) = 1$. Vihje: Luentoesimerkki.

   Mallivastaus:
$$yy' = 3 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\frac{1}{2}y^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = 3x + C.$$
   Sijoittamalla $x = 0$ saadaan $\frac{1}{2} = C$ ja edelleen $y = \sqrt{6x+1}$.

5. Käytä Newtonin menetelmää yhtälön $x^3 + x - 1 = 0$ likimääräisen ratkaisun löytämiseksi sellaisella tarkkudella, jossa vaikuttaa olevan 8 desimaalia oikein. Ohje: Valitse alkuarvo siten, että se vaikuttaisi olevan lähellä nollakohtaa.

   Mallivastaus: funktiolle $f(x) = x^3 + x - 1$ on $f(0) = -1$, joten valitaan $x_0 = 0$. Iteraatiolla $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n-1} - \frac{x_n^3+x_n-1}{3x_n^2+1}$ saadaan $x_1 = 1$, $x_2 = 0.75$, $x_3 = 0.6860465116$, $x_4 = 0.6823395826$, $x_5 = 0.6823278039$, $x_6 = 0.6823278038$. Näyttää siis että viides iteraatio tuottaa tuloksen halutulla tarkkuudella.

6. Funktiolla $\frac{1}{1-x}$ on pisteessä $x = 0$ tunnettu Taylorin kehitelmä
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + O(x^{n+1})$$
   Onko siis seuraava oikein kun $x \to 0$:
$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + O(x^4))?$$
   Entä onko seuraava oikein kun $x \to 1$:
$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-(x-1)} = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + O((x-1)^4)?$$
   Kumpi näistä on "oikea" Taylorin kehitelmä funktiolle $f(x) = \frac{1}{2-x}$?

   Mallivastaus: Molemmat kehitelmät ovat oikein. Ensimmäinen kehitelmä on pisteeseen $x = 0$ liittyvä Taylorin polynomi, toinen pisteeseen $x = 1$ liittyvä.

7. Etsi funktiolle $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$ astetta 6 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = 0$. Ohje: Kts. Demo 2

   Mallivastaus:
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\Big) = \frac{1}{5}\Big(-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\Big) \\ &= \frac{1}{5}\Big(-\frac{1}{3}\Big(1 + \frac{x}{3} + \Big(\frac{x}{3}\Big)^2 + \Big(\frac{x}{3}\Big)^3 + \Big(\frac{x}{3}\Big)^4 + \Big(\frac{x}{3}\Big)^5 + \Big(\frac{x}{3}\Big)^6 + O(x^7)\Big) \\ &\quad -\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{x}{2} + \Big(\frac{x}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{x}{2}\Big)^3 + \Big(\frac{x}{2}\Big)^4 - \Big(\frac{x}{2}\Big)^5 + \Big(\frac{x}{2}\Big)^6 + O(x^7)\Big)\Big) \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{36}x - \frac{7}{216}x^2 + \frac{13}{1296}x^3 - \frac{55}{7776}x^4 + \frac{133}{46656}x^5 - \frac{463}{279936}x^6 + O(x^7). \end{aligned}$$

8. Etsi funktiolle $f(x) = (\sin x)^2$ astetta 6 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = 0$. Vihje: Voit käyttää tunnettua kehitelmää $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$ ja kertoa tämän itsensä kanssa.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned}
(\sin x)^2 &= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} + O(x^8) \\
&\quad - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{6^2} - \frac{x^8}{6 \cdot 120} + O(x^{10}) \\
&\quad + \frac{x^6}{120} - \frac{x^{10}}{120^2} + O(x^{12}) + O(x^8) + O(x^{10}) + O(x^{12}) + O(x^{14}) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + O(x^8).
\end{aligned}$$

9. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x \sin x - 6x^2 + x^4}{6 \cos x + 3x^2 - \frac{1}{4}x^4 - 6}$$

käyttämällä Taylorin polynomeja pisteen $x = 0$ ympäristössä.

Mallivastaus:

$$\begin{aligned}
&\frac{6x \sin x - 6x^2 + x^4}{6 \cos x + 3x^2 - \frac{1}{4}x^4 - 6} \\
= \; &\frac{6x(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^8)) - 6x^2 + x^4}{6(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + O(x^8)) + 3x^2 - \frac{1}{4}x^4 - 6} \\
= \; &\frac{\frac{1}{20}x^6 + O(x^8)}{-\frac{1}{120}x^6 + O(x^8)} = \frac{\frac{1}{20} + O(x^2)}{-\frac{1}{120} + O(x^2)} \xrightarrow{x \to 0} -6.
\end{aligned}$$