Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2023

Demonstraatio 4, 17.10.2023

1. Valitaan tarkasteluväliksi $[0, 1]$ ja funktioksi $f(x) = 2^x$. Valitaan lisäksi välin $[0, 1]$ jaoksi tasavälinen jako $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Kirjoita näkyviin lausekkeet $\underline{S}_{D_n}$ ja $\overline{S}_{D_n}$ ja sievennä niitä niin pitkälle kuin mahdollista. Ohje: Voit käyttää geometrisen summan kaavaa $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

2. Selvitä integraalin $\displaystyle\int_0^1 2^x \, dx$ arvo edellisen tehtävän tuloksen perusteella. Ohje: Sopiva Taylorin polynomiapproksimaatio voi olla tarpeen lopullisen raja-arvon määrittämiseksi kun $n \to \infty$.

3. Määritä $\displaystyle\frac{d}{dx} \int_1^{x^3} \frac{e^t}{t} \, dt$.

4. Määritä $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$. Vihje: Osittaisintegrointi ja $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

5. Määritä integraalilaskennan keinoin pinta-ala joka jää käyrän $y = \sqrt{1 - x^2}$ ja x-akselin väliin kun $x \in [-1, 1]$. Vihje: Sopiva sijoitus, kts. aiempi demokerta.

6. Esitä integraalilauseke sen kappaleen tilavuudelle, joka muodostuu kun välillä $[1, M]$ $(M > 1)$ määritelty käyrä $y = \frac{1}{x}$ pyörähtää x-akselin ympäri. Laske tilavuus ja arvioi kuinka suuri se voi korkeintaan olla.

7. Esitä integraalilauseke sen kappaleen pinta-alalle, joka muodostuu kun välillä $[1, M]$ $(M > 1)$ määritelty käyrä $y = \frac{1}{x}$ pyörähtää x-akselin ympäri. Päätyjen pinta-aloja ei lasketa mukaan.

8. Arvioi edellisen tehtävän integraalilauseketta ja osoita että pinta-ala on vähintään $2\pi \ln M$.

9. Newtonin gravitaatiolain mukaan kappaleiden (massat M ja m, etäisyys s) välinen voima on $F = G\frac{Mm}{s^2}$, missä G on gravitaatiovakio ja etäisyys s tarkoittaa massakeskipisteiden välistä etäisyyttä.

   Tarkastellaan tilannetta jossa toinen kappaleista on maapallo (massa M, säde R) ja toinen pieni kappale (massa m), joka nostetaan tasaisella nopeudella maapallon pinnalta korkeudelle h. Tällöin massakeskipisteiden välinen etäisyys kasvaa arvosta R arvoon $R+h$. Kirjoita nostamisessa tehty työ integraalilausekkeena ja määritä sen arvo. Ohje: Luentoruudut 12.10.

   Oletetaan lopuksi että h on hyvin pieni R:n verrattuna. Käytä Taylorin approksimaatiota saadulle lausekkeelle ja vakioille arvoja $G = 6.6734 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$, $M = 5.972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 6371 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$ esittääksesi työn likiarvon muodossa $C \cdot m \cdot h$. Minkä likiarvon saat vakiolle C?

   Ohje: Jos tehty työ on laskettu oikein, esiintyy siinä lauseke $\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}$. Ottamalla $\frac{1}{R}$ yhteiseksi tekijäksi saadaan

   $$\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{R}}\right).$$

   Käytä tunnettua Taylorin approksimaatiota sulkujen sisällä olevaan osamäärälausekkeeseen.