# Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2023

## Demonstraatio 4, 17.10.2023

1. Valitaan tarkasteluväliksi $[0,1]$ ja funktioksi $f(x) = 2^x$. Valitaan lisäksi välin $[0,1]$ jaoksi tasavälinen jako $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Kirjoita näkyviin lausekkeet $\underline{S}_{D_n}$ ja $\overline{S}_{D_n}$ ja sievennä niitä niin pitkälle kuin mahdollista. Ohje: Voit käyttää geometrisen summan kaavaa $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

   Mallivastaus: Funktio on kasvava, joten minimiarvo saavutetaan tarkasteluvälin alku- ja maksimiarvo loppupisteessä. Näin ollen

$$\underline{S}_{D_n} = \sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{i-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(2^{\frac{1}{n}})^i = \frac{1}{n}\frac{1-(2^{\frac{1}{n}})^n}{1-2^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n(2^{\frac{1}{n}}-1)}$$

   ja

$$\overline{S}_{D_n} = \sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{\frac{i+1}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(2^{\frac{1}{n}})^i \cdot 2^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}}\underline{S}_{D_n}$$

2. Selvitä integraalin $\displaystyle\int_0^1 2^x\,dx$ arvo edellisen tehtävän tuloksen perusteella. Ohje: Sopiva Taylorin polynomiapproksimaatio voi olla tarpeen lopullisen raja-arvon määrittämiseksi kun $n \to \infty$.

   Mallivastaus: $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, joten $2^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Näin ollen edellisen tehtävän ylä- ja alasummat lähestyvät samaa raja-arvoa. Sen määrittämiseksi selvitetään polynomiapproksimaatio funktiolle:

$$f(x) = 2^x = e^{x\ln 2} = 1 + x\ln 2 + O(x^2).$$

   Tästä nähdään että

$$\underline{S}_{D_n} = \frac{1}{n(2^{\frac{1}{n}}-1)} = \frac{1}{n(1+\frac{1}{n}\ln 2 + O(\frac{1}{n^2}) - 1)} = \frac{1}{\ln 2 + O(\frac{1}{n})} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\ln 2}$$

3. Määritä $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^{x^3}\frac{e^t}{t}\,dt$.

   Mallivastaus: Funktio ei ole määritelty jos nolla on integrointivälillä, mutta $f(x) = \frac{e^x}{x}$ on jatkuva kun $x \neq 0$, joten sillä on antiderivaatta $F(x)$ olemassa jokaisella välillä joka ei sisällä nollaa. Tällaisella välillä on

$$\int_1^{x^3}\frac{e^t}{t}\,dt = \Big/_{1}^{x^3} F(t) = F(x^3) - F(1).$$

   Näin ollen

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^3}\frac{e^t}{t}\,dt = F'(x^3)\cdot 3x^2 = \frac{e^{x^3}}{x^3}\cdot 3x^2 = \frac{3e^{x^3}}{x}.$$

4. Määritä $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx$. Vihje: Osittaisintegrointi ja $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Mallivastaus: Merkitään kysyttyä integraalia symbolilla $I$, jolloin

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \frac{d}{dx}(-\cos x)\, dx = \Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x(-\cos x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos^2 x\, dx \\
&= 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1-\sin^2 x)\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx - 2I.
\end{aligned}$$

Tästä nähdään että

$$3I = 2\int_2^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 2 \Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}} -\cos x = 2,$$

joten $I = \frac{2}{3}$.

5. Määritä integraalilaskennan keinoin pinta-ala joka jää käyrän $y = \sqrt{1-x^2}$ ja $x$-akselin väliin kun $x \in [-1, 1]$. Vihje: Sopiva sijoitus, kts. aiempi demokerta.

   Mallivastaus: Funktio $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ on parillinen, joten

   $$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

   Sijoitetaan $x = \sin t$, jolloin uusiksi integrointirajoiksi voidaan valita 0 ja $\frac{\pi}{2}$ ja

   $$\begin{aligned}
   A &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx \\
   &= \Big/_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x + \frac{1}{2}\sin 2x) = \frac{\pi}{2}.
   \end{aligned}$$

   **Huomautus:** Sijoitus $x = \cos t$ on yhtä lailla mahdollinen ja johtaa samaan tulokseen. Tällöin integroinnin alarajaksi pitää valita $\frac{\pi}{2}$ ja ylärajaksi 0.

6. Esitä integraalilauseke sen kappaleen tilavuudelle, joka muodostuu kun välillä $[1, M]$ $(M > 1)$ määritelty käyrä $y = \frac{1}{x}$ pyörähtää $x$-akselin ympäri. Laske tilavuus ja arvioi kuinka suuri se voi korkeintaan olla.

   Mallivastaus: Luentoesimerkin mukaan

   $$V = \pi\int_1^M \frac{1}{x^2}\, dx = \pi \Big/_{1}^{M} -\frac{1}{x} = \pi(1 - \frac{1}{M}) < \pi.$$

7. Esitä integraalilauseke sen kappaleen pinta-alalle, joka muodostuu kun välillä $[1, M]$ $(M > 1)$ määritelty käyrä $y = \frac{1}{x}$ pyörähtää $x$-akselin ympäri. Päätyjen pinta-aloja ei lasketa mukaan.

   Mallivastaus: Koska $\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$, saadaan luentoesimerkin mukaan vaipan pinta-ala integraalilla

   $$2\pi\int_1^M \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\, dx.$$

8. Arvioi edellisen tehtävän integraalilauseketta ja osoita että pinta-ala on vähintään $2\pi \ln M$.

   Integraalilauseketta voidaan arvioida seuraavasti:

$$2\pi \int_1^M \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx \geq 2\pi \int_1^M \frac{1}{x}\sqrt{1+0}\,dx = 2\pi \Big/_{1}^{M} \ln x = 2\pi \ln M.$$

   **Jatkokysymys kolmeen edelliseen tehtävään:** Kun $M$ kasvaa rajatta, tehtävissä esiintyvä kappale on tilavuudeltaan rajoitettu, mutta pinta-alaltaan rajoittamaton. Tällöin vaikuttaisi siltä, että vakiomäärä maalia riittäisi täyttämään kappaleen olipa $M$ miten suuri hyvänsä, mutta mikään määrä maalia ei riittäisi sen maalaamiseen kun $M$ kasvaa riittävän suureksi. Miten tämä on mahdollista?

9. Newtonin gravitaatiolain mukaan kappaleiden (massat $M$ ja $m$, etäisyys $s$) välinen voima on $F = G\frac{Mm}{s^2}$, missä $G$ on gravitaatiovakio ja etäisyys $s$ tarkoittaa massakeskipisteiden välistä etäisyyttä.

   Tarkastellaan tilannetta jossa toinen kappaleista on maapallo (massa $M$, säde $R$) ja toinen pieni kappale (massa $m$), joka nostetaan tasaisella nopeudella maapallon pinnalta korkeudelle $h$. Tällöin massakeskipisteiden välinen etäisyys kasvaa arvosta $R$ arvoon $R+h$. Kirjoita nostamisessa tehty työ integraalilausekkeena ja määritä sen arvo. Ohje: Luentoruudut 12.10.

   Oletetaan lopuksi että $h$ on hyvin pieni $R$:n verrattuna. Käytä Taylorin approksimaatiota saadulle lausekkeelle ja vakioille arvoja $G = 6.6734 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$, $M = 5.972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 6371 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$ esittääksesi työn likiarvon muodossa $C \cdot m \cdot h$. Minkä likiarvon saat vakiolle $C$?

   Ohje: Jos tehty työ on laskettu oikein, esiintyy siinä lauseke $\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}$. Ottamalla $\frac{1}{R}$ yhteiseksi tekijäksi saadaan

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{h}{R}}\right).$$

   Käytä tunnettua Taylorin approksimaatiota sulkujen sisällä olevaan osamäärälausekkeeseen.

   Mallivastaus: Kun kappaletta nostetaan tasaisella nopeudella tarvitaan täsmälleen maan vetovoiman suuruinen voima siirtämään kappaletta. Luentoesimerkin mukaan tehty työ on tällöin

$$\begin{aligned} W &= \int_R^{R+h} G\frac{Mm}{s^2}\,ds = GMm\int_R^{R+h} \frac{1}{s^2}\,ds = GMm \Big/_{R}^{R+h} -\frac{1}{s} \\ &= GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{GM}{R}m\left(1 - \frac{1}{1+\frac{h}{R}}\right). \end{aligned}$$

   Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ensimmäisen kertaluvun Taylorin approksimaatio on $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \approx 1 - x$ kun $x \to 0$. Mikäli $h$ on pieni säteeseen $R$ verrattuna, on $\frac{h}{R}$ lähellä nollaa ja siksi tehtyä työtä voidaan approksimoida lausekkeella

$$\frac{GM}{R}m\left(1 - \left(1 - \frac{h}{R}\right)\right) = \frac{GM}{R}m\frac{h}{R} = \frac{GM}{R^2}mh.$$

Vakiota $\frac{GM}{R^2} \approx = 9.8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ on tapana merkitä symbolilla $g$.

**Huomautus:** Nostaessa tehty työ on sama kuin kappaleen potentiaalienergian lisäys.