Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2023

Demonstraatio 5, 24.10.2023

1. Selvitä suoraan määritelmään perustuen suppenevatko seuraavat integraalit:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

ja

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx.$$

Vihje: Antiderivaattojen etsimiseksi sijoitus $x = e^t$ voi olla käyttökelpoinen. Sen avulla lienee mahdollista määrittää integraalien arvot, kun ylärajana on M.

2. Etsi sopivat vertailufunktiot ja päättele niiden perusteella suppenevatko seuraavat integraalit:

$$\int_1^\infty \frac{2x}{x^2+1}\, dx$$

ja

$$\int_1^\infty \frac{2\sqrt{x}+1}{x^2+3x+1}\, dx.$$

3. Selvitä suoraan määritelmään perustuen suppeneeko seuraava integraali:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$$

Ohje: Olkoon $\epsilon \in (0,1)$. Laske integraali ensin välillä $[\epsilon, 1]$ ja selvitä mitä tapahtuu, kun $\epsilon \to 0+$.

4. Selvitä suppeneeko integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Mikäli integraali suppenee, määritä sen arvo. Vihje: Suppenemisen selvittämiseksi voi esittää integrandin nimittäjässä olevan lausekkeen muodossa $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ ja miettiä kumpi tulon tekijöistä aiheuttaa epäoleellisuuden kun $x \to 1$. Voi käyttää luentomonisteen huomautusta 29. Lisävihjeenä esimerkki luennolla 12.10.

5. Suppenevatko seuraavat sarjat:

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}\, dx$$

ja

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln^2 n}\, dx.$$

Vihje: Vertaa sopivaan integraaliin.

6. Selvitä suppeneeko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Vihje: vertaa sarjan peräkkäisiä termejä ja selvitä onko niiden osamäärä $\leq c <$ 1, kun n on kyllin suuri.

7. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

summa. Ohje: Aloita tunnetusta sarjasta (geometrinen)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ja derivoi molemmat puolet, oikea puoli termeittäin. Kerro x:llä puolittain ja sijoita lopuksi x:n paikalle sopiva luku.

8. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

summa. Vihje: Sama kuin edellisessä tehtävässä, mutta derivoinnin sijasta integroi.

9. Selitä miten funktion $\arctan x$ sarjaesitys (pisteen $x_0 = 0$) ympäristössä voidaan löytää lähtien geometrisesta sarjasta

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Vihje: Palauta 1. demoista mieleen $\frac{d}{dx} \arctan x$, sijoita $x = -t^2$ ja integroi molemmat puolet yli välin $[0, x]$.