Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta 2023

Demonstraatio 5, 24.10.2023

1. Selvitä suoraan määritelmään perustuen suppenevatko seuraavat integraalit:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

ja

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx.$$

Vihje: Antiderivaattojen etsimiseksi sijoitus $x = e^t$ voi olla käyttökelpoinen. Sen avulla lienee mahdollista määrittää integraalien arvot, kun ylärajana on M.

Mallivastaus: Sijottamalla $x = e^t$ integraaliin

$$\int_2^M \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

saadaan

$$\int_{\ln 2}^{\ln M} \frac{1}{e^t t} e^t\, dt = \int_{\ln 2}^{\ln M} \frac{1}{t}\, dt = \mathop{\Big/}_{\ln 2}^{\ln M} \ln t = \ln\ln M - \ln\ln 2 \xrightarrow{M\to\infty} \infty.$$

Joten ensimmäinen integraali hajaantuu.

Sijottamalla $x = e^t$ integraaliin

$$\int_2^M \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx$$

saadaan

$$\int_{\ln 2}^{\ln M} \frac{1}{e^t t^2} e^t\, dt = \int_{\ln 2}^{\ln M} \frac{1}{t^2}\, dt = \mathop{\Big/}_{\ln 2}^{\ln M} -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln M} + \frac{1}{\ln 2} \xrightarrow{M\to\infty} \frac{1}{\ln 2},$$

joten jälkimmäinen integraali suppenee.

Huomautus: Tiedetään, että integraali $\int_2^\infty \frac{1}{x}\, dx$ hajaantuu, mutta $\int_2^\infty \frac{1}{x^{1+\epsilon}}\, dx$ suppenee, olipa $\epsilon > 0$ miten pieni hyvänsä. Toisaalta tiedetään että $\ln x < x^\epsilon$ kun x on riittävän suuri, joten ei ole itsestään selvää riittääkö termin $\ln x$ lisääminen lausekkeen $\frac{1}{x}$ nimittäjään saamaan integraalin suppenemaan. Tehtävässä nähtiin, että termin $\ln x$ lisääminen ei riitä, mutta termin $\ln^2 x$ lisääminen riittää.

2. Etsi sopivat vertailufunktiot ja päättele niiden perusteella suppenevatko seuraavat integraalit:

$$\int_1^\infty \frac{2x}{x^2+1}\, dx$$

ja

$$\int_1^\infty \frac{2\sqrt{x}+1}{x^2+3x+1}\, dx.$$

Mallivastaus: Supistamalla ensimmäistä integrandia x:llä huomataan, että nimittäjään jäävä korkein potenssi on 1. Tällöin kannattaa vertailufunktioksi valita $\frac{1}{x}$. Silloin

$$\frac{2x}{x^2+1} : \frac{1}{x} = \frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x\to\infty} 2.$$

Tehtävän ensimmäinen integraali siis hajaantuu, koska $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ hajaantuu.

Supistamalla toista integrandia $\sqrt{x}$:llä nähdään että nimittäjään jäävä korkein potenssi on $\frac{3}{2}$ ja tämän vuoksi kannattaa vertailufunktioksi valita $x^{\frac{3}{2}}$. Tällöin

$$\frac{2\sqrt{x}+1}{x^2+3x+1} : \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^2+x^{\frac{3}{2}}}{x^2+3x+1} = \frac{2+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x\to\infty} 2.$$

Koska integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ suppenee, niin myös tehtävän toinen integraali suppenee.

3. Selvitä suoraan määritelmään perustuen suppeneeko seuraava integraali:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

Ohje: Olkoon $\epsilon \in (0,1)$. Laske integraali ensin välillä $[\epsilon, 1]$ ja selvitä mitä tapahtuu, kun $\epsilon \to 0+$.

Mallivastaus:

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \Big/_{\epsilon}^{1} -\frac{1}{x} = -1 + \frac{1}{\epsilon} \xrightarrow{\epsilon\to 0+} \infty.$$

Integraali siis hajaantuu.

4. Selvitä suppeneeko integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Mikäli integraali suppenee, määritä sen arvo. Vihje: Suppenemisen selvittämiseksi voi esittää integrandin nimittäjässä olevan lausekkeen muodossa $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ ja miettiä kumpi tulon tekijöistä aiheuttaa epäoleellisuuden kun $x \to 1$. Voi käyttää luentomonisteen huomautusta 29. Lisävihjeenä esimerkki luennolla 12.10.

Mallivastaus:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}},$$

ja tekijä $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ ei aiheuta epäoleellisuutta ylärajalla, vaan se johtuu tekijästä $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$. Koska $\frac{1}{2} < 1$, II lajin epäoleellinen integraali suppenee.

Integraalin arvo voidaan selvittää sijoituksella $x = \sin t$, jolloin $dx = \cos t\,dt$ ja rajoiksi saadaan 0 ja $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{|\cos t|}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

5. Suppenevatko seuraavat sarjat:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}\, dx$$

ja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}\, dx.$$

Vihje: Vertaa sopivaan integraaliin.

Mallivastaus: Vertaamalla tehtävän 1 integraaleihin voidaan päätellä että ensimmäinen sarja hajaantuu ja toinen suppenee.

Huomautus: Differentiaali- ja integraalilaskennan työkalupakin vahvuus tulee hyvin esille tässä yhteydessä. Ilman differentiaali- ja integraalilaskentaa on erittäin hankalaa selvittä esimerkiksi miten summa $\sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n \ln n}$ käyttäytyy, kun $M \to \infty$.

6. Selvitä suppeneeko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \Big(\frac{1}{5}\Big)^n$$

Vihje: vertaa sarjan peräkkäisiä termejä ja selvitä onko niiden osamäärä $\leq c < 1$, kun n on kyllin suuri.

Mallivastaus: Peräkkäisten termien osamäärä on

$$(n+1)^3 \Big(\frac{1}{5}\Big)^{n+1} : n^3 \Big(\frac{1}{5}\Big)^n = \big(\frac{n+1}{n}\big)^3 \frac{1}{5} = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^3 \frac{1}{5} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{5} < 1,$$

joten sarja suppenee.

7. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \Big(\frac{1}{5}\Big)^n$$

summa. Ohje: Aloita tunnetusta sarjasta (geometrinen)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ja derivoi molemmat puolet, oikea puoli termeittäin. Kerro x:llä puolittain ja sijoita lopuksi x:n paikalle sopiva luku.

Mallivastaus: Derivoimalla saadaan

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1},$$

josta

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$

Sijoittamalla tähän $x = \frac{1}{5}$ saadaan

$$\frac{5}{16} = \sum_{n=1}^{\infty} n \Big(\frac{1}{5}\Big)^n$$

8. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

summa. Vihje: Sama kuin edellisessä tehtävässä, mutta derivoinnin sijasta integroi.

Mallivastaus: Integroimalla saadaan

$$-\ln(1-x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Integrointivakio C voidaan selvittää esimerkiksi sijoittamalla $x = 0$, mistä nähdään että $C = 0$. Sijoitus $x = \frac{1}{5}$ antaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n = -\ln\frac{4}{5} = \ln\frac{5}{4}$$

9. Selitä miten funktion $\arctan x$ sarjaesitys (pisteen $x_0 = 0$) ympäristössä voidaan löytää lähtien geometrisesta sarjasta

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Vihje: Palauta 1. demoista mieleen $\frac{d}{dx}\arctan x$, sijoita $x = -t^2$ ja integroi molemmat puolet yli välin $[0, x]$.

Mallivastaus: Vihjeessä ehdotettu sijoitus tuottaa yhtälön

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}.$$

Integrointi puolestaa tuottaa yhtälön

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt,$$

$$\Big/_{0}^{x} \arctan t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \Big/_{0}^{x} \frac{1}{2n+1} t^{2n+1},$$

ja edelleen

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$$