

Mika Hirvensalo

Insinöörimatematiikka C 2019

Sisältö

1	Johdanto	1
1.1	Kerrattavaa	1
1.2	Kurssin sisällöstä	1
1.3	Funktioiden esityksistä	2
2	Lukujonot ja numeeriset sarjat	5
2.1	Sarjojen perusominaisuuksia	9
2.2	Geometrinen sarja	10
2.3	Desimaaliesitys	11
2.4	Suppenemiskriteereitä	12
2.5	Vuorottelevat sarjat	16
2.6	Termien järjestyksenvaihto, Cauchyn tulo	17
3	Funktiosarjat ja integraalin määrittelemät funktiot	21
3.1	Summaus tai integrointi yli äärellisen välin	22
3.2	Tasainen suppeneminen	23
3.3	Potenssisarjat	26
4	Sarjaopin sovelluksia	31
4.1	Eulerin kaava	31
4.2	Generoivat funktiot ja rekursioyhtälöt	31
4.3	Sarjaratkaisut differentiaaliyhtälöille	33
5	Fourier'n sarjat	35
5.1	Fourier-sarjojen kompleksinen muoto	36
5.2	Fourier-sarjojen reaalin muoto	39
5.3	Fourier-sarjojen ominaisuuksia	41
6	Fourier-muunnokset	45
6.1	Fourier-integraali ja -muunnos	45
6.2	Fourier-muunnoksen tulkintaa	49
6.2.1	Fourier'n integraalin esitysmuotoja	49
6.2.2	Äänisignaalin esittäminen	50
6.3	Fourier-muunnosten ominaisuuksia	52
6.3.1	Perusominaisuuksia	52
6.4	Delta-funktio	54
6.4.1	Konvoluutio	57
6.4.2	Heavisiden funktio	60
6.5	Keskusmomentit ja epätarkkuusrelaatio	61
6.6	Nyquistin näytteenottotaajuus	65
6.7	Fourier-sarjojen ja integraalien yhteys	67
7	Diskreetti Fourier-muunnos	71
7.1	Diskreetin Fourier-muunnosten ominaisuuksia	72
7.2	FFT (Fast Fourier Transform)	74

8	Laplace-muunnokset	79
8.1	Määritelmä ja perusominaisuuksia	80
8.2	Laplace-muunnosten olemassaolosta	81
8.3	Konvoluutio ja deltafunktio	83
8.4	Laplace-muunnoksen yhteys Fourier-muunnokseen, inversiokaava	83
8.5	Laplace-muunnoksen kääntäminen käytännössä	85
8.5.1	Laplace-muunnospareja	85
8.5.2	Yleisimmät menetelmät	87

Luku 1

Johdanto

1.1 Kerrattavaa

Tätä opintojaksoa varten tulee hallita aiemmissa insinöörimatematiikan kursseissa esitetyt tiedot. Opiskelijan on varmistauduttava, että Insinöörimatematiikka A:sta on omaksuttu ainakin seuraavat asiat: kompleksilukujen käsittely, napakoordinaattiesitys, ykkösenjuuret, Eulerin kaavan mukainen yhteys eksponenttifunktion ja trigonometristen funktioiden välillä ja osamurtohajotelmien etsiminen. Insinöörimatematiikka B:stä tulee olla hallussa erityisesti derivointisäännöt, antiderivaatan löytäminen (määräämätön integraali), kompleksiarvoisen funktion integrointi yli reaalisen välin, I lajin epäoleelliset integraalit ja niiden suppenemistarkastimet.

1.2 Kurssin sisällöstä

Historiallisesti tarkastellen voidaan havaita matematiikkaa sovelletun erittäin monissa käyttökohteissa kautta aikojen. Varhaisimmat sovellukset liittyivät ajanlaskuun, astronomiaan, kaupankäyntiin ja maanmittaukseen. Uuden ajan alkaessa matematiikasta oli tullut korvaamaan apuneuvo luonnontieteiden kehitykselle. Matematiikkaa on usein kutsuttu luonnontieteiden kieleksi, ja katsaus menneeseen osoittaa, että tämä luonnehdinta on erittäin kuvaava. Mekaniikan kehittäminen, kvanttimekaniikasta puhumattaakaan, ei olisi ollut mahdollista ilman tarpeeseen sopivaa matematiikkaa. Aina 1900-luvun puoliväliin asti fysiikka lieni tärkein motivaatio uuden matematiikan kehittämiseksi. Sitten uuden matematiikan kehittäminen on liittynyt yhä enenevässä määrin informaatioteknologian ja biologian tarpeisiin.

Erityisen mielenkiintoisia ovat havainnot, joissa huomataan jotakin tarkoitusta varten kehitetyn matematiikan soveltuvan hyvin myös muihin asiayhteyksiin. Joseph Fourier mallinsi lämmön johtumista, mutta hänen työnsä on sittemmin havaittu soveltuvan yleisesti aaltoliikkeiden kuvailemiseen. Fourier'n töitä jatkamalla on päädytty matematiikan osa-alueeseen, jota nykyisin kutsutaan *Fourier-analyysiksi* tai *harmoniseksi analyysiksi*. Yleensä harmonisen analyysin ymmärretään terminä olevan laajempi käsite, joka sisältää Fourier-analyysin.

Taustatietoa



Joseph Fourier (1768–1830) oli ranskalainen matemaatikko ja fyysikko, joka tutki mm. lämmönjohtumista. Nykyinen Fourier-analyysi, joka on yksi tärkeimmistä menetelmistä informaation käsittelyssä ja analysoinnissa, pohjautuu hänen töihinsä.

(kuva: Wikimedia Commons)

Aaltoliikettä koskevan teorian sovellusalue ei ole vähäinen, sillä kvanttimekaniikan mukaisesti fysikaaliset objektit voidaan kuvata aaltoliikkeinä. Niinpä Fourier-analyysiä voidaan pitää yhtenä kvanttimekaniikan kulmakivenä. On kuitenkin huomattava, että kvanttimekaniikan teoriassa tarvittavat harmonisen analyysin yleistykset saattavat poiketa perinteisestä Fourier-analyysistä hyvinkin paljon. Lisäksi harmoninen analyysi saa entistä enemmän ilmaisuvoimaa kun sen koneistoa tulkitaan lineaarialgebran kautta.

Fysikaalisten sovellusten, kuten lämmönjohtumisen tai aaltoliikeopin ohella on Fourier-analyysillä erittäin tärkeitä sovelluksia informaatiotekniikassa. Aaltoliikeoppiin perustuvat perinteiset sovellukset ovat viime kädessä ymmärrettävissä sitä taustaa vasten, että suuri osa nykyisestä informaation siirrosta perustuu johonkin aaltoliikkeeksi kuvailtavaan fysikaaliseen ilmiöön, kuten sähkömagneettiseen säteilyyn. Ehkä kuitenkin kaikkein laajimmin nykyisin esiintyvä Fourier-analyysin sovelluskenttä perustuu minkä hyvänsä informaation tulkitsemiseen aaltoliikkeiden yhdistelmäksi. Tällä tavoin on mahdollista soveltaa harmonista analyysiä esimerkiksi digitaalisen äänen tai kuvan pakkaamiseen ja käsittelemiseen.

Fourier-analyysin merkitystä signaalinkäsittelylle on vaikea yliarvioida. Fourier-muunnoksia on perinteisesti käytetty ilmiöiden jaksollisuuden analysoinnissa, mutta digitaalisen signaalinkäsittelyn myötä Fourier-analyysin käytännön sovellusten merkitys on kasvanut ennennäkemättömän suureksi. Harmonisen analyysin sovelluksia löytyy käytännöllisesti katsoen jokaisesta digitaalista signaalia käsittelevästä laitteesta, kuten matkapuhelimesta, digikamerasta, blue-ray -soittimesta, jne.

Fourier-analyysi on myös erittäin oleellinen osa nykyaikaista luonnontieteellistä tutkimusta. Periaatteellisella tasolla *spektroskopia* ja Fourier-analyysi ovat vahvasti toisiinsa kytköksissä. Spektroskopian laboratorion menetelmät voidaan ymmärtää Fourier-analyysin kautta ja parhaimmat nykyaikaiset spektrometrit perustuvat Fourier-analyysin laskennallisiin sovelluksiin. Tyypillinen sovellus on jonkin molekyylin läsnäolon tai poissaolon tunnistaminen: Jos molekyylin tiedetään absorboivan tai emittoivan sähkömagneettista säteilyä tietyillä aallonpituuksilla, tulee näytteestä lähtevästä sähkömagneettisesta säteilystä (esim. valosta) selvittää, millä vahvuuksilla eri aallonpituudet siinä esiintyvät. Esimerkiksi molekyylien rakenteen tunnistamisessa käytettävä, ydinmagneettiseen resonanssiin (NMR) perustuva menetelmä pohjautuu viime kädessä Fourier-analyysiin.

Perinteinen, ns. *jatkuva* Fourier-analyysi keskittyy integraali- ja differentiaalilaskennan koneiston ympärille, mutta sovelluksissa erittäin tärkeäksi nousee *diskreetti* Fourier-analyysi. Jatkuva ja diskreetti Fourier-analyysi tukevat toisiaan sekä teorian ymmärtämisessä että käytännön sovelluksissa.

Kurssilla Insinöörimatematiikka C on tarkoitus perehtyä Fourier-analyysin perusteisiin. Tätä varten tarvittavia matemaattisia työkaluja, differentiaali- ja integraalilaskentaa, erityisesti I lajin epäoleellisia integraaleja, on esitelty jo Insinöörimatematiikka B:ssä. Ennen Fourier-analyysiin siirtymistä tulee kuitenkin vielä esitellä yksi puuttuva matemaattinen työkalu, nimittäin sarjaoppi. Siksi tämä kurssi alkaa sarjaopin osiolla, jonka yhteydessä laajennetaan I lajin epäoleellisten integraalien yhteydessä esitetyjä käsitteitä. Varsinainen Fourier-analyysi aloitetaan Fourier'n sarjojen käsittelyllä ja tästä lähtökohdasta jatketaan Fourier'n integraaleihin. Kurssin lopuksi esitetään myös Fourier-muunnoksille sukua olevat Laplace-muunnokset, joilla on vakiintuneet käyttökohteensa elektroniikassa.

1.3 Funktioiden esityksistä

Erityisesti lineaarialgebran näkökulmaa korostava lähestymistapa harmoniseen analyysiin on seuraavanlainen: Ajatellaan funktion $F(x)$ esittävän jotakin fysikaalista suuretta, jonka arvo riippuu x :stä (x voi esittää vaikkapa aikaa). Funktion F ominaisuuksien tarkastelua varten saattaa olla hyödyllistä esittää F joidenkin yksinkertaisten funktioiden avulla. Insinöörimatematiikka B:ssä esiintynyt Taylorin polynomi on esimerkki tällaisesta esityksestä, jossa tosin esitys ei ole eksakti vaan likimääräinen:

$$F(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n. \quad (1.1)$$

Tässä tapauksessa polynomit $1 = x^0, x = x^1, x^2, x^3, \dots$, muodostavat ”yksinkertaisen” funktiosysteemin, jonka avulla ”monimutkaisempi” F esitetään (likimääräisesti). Kertoimien a_0, a_1, a_2, \dots määrittäminen on esityksen (1.1) kannalta tietenkin erittäin tärkeä kysymys, ja Taylorin polynomeja koskevassa Insinöörimatematiikka B:n luvussa tämä ratkaistiin seuraavasti: $a_k = \frac{1}{k!} F^{(k)}(0)$.

Esitys (1.1) voidaan yleistää seuraavasti: funktioiden $f_k(x) = x^k$ sijasta valitaan mitkä hyvänsä jossain määrin yksinkertainen funktiojono f_0, f_1, f_2, \dots , ja pyritään esittämään monimutkaisempi F muodossa

$$F(x) = a_0f_0(x) + a_1f_1(x) + a_2f_2(x) + \dots + a_nf_n(x), \quad (1.2)$$

joko eksaktisti tai likimääräisesti. Myös esityksessä (1.2) oleelliseksi kysymykseksi muodostuu se, miten kerroin a_k saadaan, kun F tunnetaan. Tämä riippuu tietysti siitä minkälainen valittujen ”kantafunktioiden” $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$ jono on. Osoittautuu kuitenkin, että summaesitys (1.2) on riittämätön useimpia sovelluksia varten.

Yksi mahdollisuus yleistää esitystä (1.2) on ottaa käyttöön suurempi kantafunktiosysteemi, jossa funktioita $f_t(x)$ olisi kokonaislukuarvojen $t \in \mathbb{Z}$ lisäksi olemassa jokaista $t \in [a, b]$ kohti. Tällöin joudutaan tilannetta käsittelemään eri tavoin: Merkitään $f_t(x) = f(t, x)$ ja funktioiden yhteenlaskun sijaan integroidaan kaikki välin $[a, b]$ arvot t yhteen:

$$F(x) = \int_a^b a(t)f(t, x) dt, \quad (1.3)$$

ja selvittävänä on miten ”kerroinfunktio” $a(t)$ määritetään. Esitys (1.3) yleistyy vielä siten, että integrointiväli $[a, b]$ saattaa ylä- tai alarajaltaan ulottua äärettömyyksiin, esimerkiksi

$$F(x) = \int_a^\infty a(t)f(t, x) dt, \quad (1.4)$$

ja tällöin tulee selvittää miten kerroinfunktio $a(t)$ määritetään. Kurssilla Insinöörimatematiikka B esityksestä (1.4) annettiin esimerkkinä ns. Γ -funktio

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

jossa voidaan kerroinfunktioksi ajatella $a(t) = e^{-t}$ ja kantafunktiosysteemiksi $f(t, x) = t^{x-1}$.

Funktioiden esittämiseksi ”kantafunktiosysteemin” avulla on ainakin seuraavat vaihtoehdot:

- Äärellinen summa:

$$F(x) = \sum_{k=1}^n a_k f_k(x)$$

- Äärellisen välin integraali:

$$F(x) = \int_a^b a(t)f(t, x) dt$$

- I lajin epäoleellinen integraali

$$F(x) = \int_a^\infty a(t)f(t, x) dt.$$

Ylläolevasta listasta puuttuu tietysti esimerkiksi yli koko reaaliakselin $(-\infty, \infty)$ ulottuva I lajin epäoleellinen integraali, mutta selkeämpi laadullinen puute on se että ns. ääretöntä summaa ei esiinny. Mitä siis tarkoittaisi esitys

$$F(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k f_k(x), \quad (1.5)$$

kun f_0, f_1, f_2, \dots on valittu kantafunktiosysteemi? Myös aiemmin esiintynyt kysymys siitä, miten luvut a_0, a_1, a_2, \dots määrätään, toistuu tässä yhteydessä kuten aiemmissakin esityksissä, ja vastaus riippuu tietysti siitä miten kantafunktiosysteemi f_0, f_1, f_2, \dots on valittu.

Esityksen (1.5) päättymätöntä summaa sanotaan *sarjaksi* ja seuraavan luvun tarkoituksena onkin perehtyä sarjojen ominaisuuksiin, alkaen siitä mitä sarja päättymättömänä summana ylipäänsä tarkoittaa.

Luku 2

Lukujonot ja numeeriset sarjat

Tässä luvussa tarkoituksena on perehtyä sarjojen yksinkertaisimpiin muotoihin, ns. numeerisiin sarjoihin. Myöhemmin osoittautuu, että ns. funktiosarjat eivät peruskäsitteiltään poikkea numeerisista sarjoista oleellisesti, vaan tarkastelukohteina olevat ominaisuudet ovat erilaisia ja siksi tarkastelunäkökulma muuttuu väistämättä toisenlaiseksi.

Sarjojen tarkastelu liittyy läheisesti Insinöörimatematiikka B:n viimeisessä luvussa käsiteltyihin I lajin epäoleellisiin integraaleihin, jotka määriteltiin raja-arvoina. Palautetaan käsite mieleen kertauksen vuoksi. I lajin epäoleellista integraalia varten määritellään ensin

$$I(M) = \int_a^M f(x) dx$$

ja sen jälkeen

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} I(M).$$

Epäoleellisen integraalin määrittely edellyttää tietenkin, että ylläoleva raja-arvo on olemassa.

Ensimmäisen lajin epäoleellinen integraali merkitsee siis integraalia, jossa integrointi ei pääty mihinkään ylärajaan, vaan jatkuu yli koko reaaliakselin. Analogisesti sarjan tahdotaan merkitsevän summaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

joka ei pääty lainkaan. I lajin epäoleellisiin integraaleihin päästiin funktioiden $I(M)$ raja-arvoista ja aivan samoin sarjojen määritelmään tullaan pääsemään lukujonojen raja-arvosta. Sarjan määritelmäksi asetetaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^M a_n,$$

mikä on täysin analoginen I lajin integraalin määritelmän kanssa: Ensin summataan johonkin ylärajaan M asti, ja sitten annetaan ylärajan M käydä kohti äärettömä. Määritelmässä esiintyvä summa

$$S_M = \sum_{n=1}^M a_n$$

muodostaa lukujonon S_1, S_2, S_3, \dots , jonka raja-arvosta on kysymys ja tämän vuoksi perehdytään ensin lukujonojen raja-arvoihin.

Muodollisesti reaali- (tai kompleksilukujono) a_1, a_2, a_3, \dots määritellään funktiona $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (tai $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$), missä siis $a(n) = a_n$. Lukujonon *raja-arvo* äärettömyydessä määritellään aivan kuten reaaliakselilla määriteltyjen funktioidenkin raja-arvo. Sanotaan, että lukujonon a_1, a_2, a_3, \dots raja-arvo on A , jos jonon jäsen a_n saadaan miten lähelle lukua A tahansa, kunhan n valitaan kyllin suureksi. Tämä täsmennetään seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä 1 Lukujonon a_1, a_2, a_3, \dots raja-arvo on A , mikäli jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa luku $M_\epsilon > 0$, jolle pätee

$$d(a_n, A) = |a_n - A| < \epsilon,$$

kunhan $n > M_\epsilon$. Tällöin merkitään $\lim a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

Määritelmä 2 Lukujono a_1, a_2, a_3, \dots *suppenee*, jos $\lim a_n$ on äärellisenä olemassa. Muutoin lukujono *hajaantuu*.

Esimerkki 1 Lukujono $a_n = \frac{1}{n}$ suppenee ja $\lim \frac{1}{n} = 0$, sillä

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon,$$

kun $n > \frac{1}{\epsilon}$.

Esimerkki 2 Lukujono $a_n = n$ hajaantuu, samoin $a_n = (-1)^n$.

Määritelmä 3 Lukujono a_n on *ylhäältä rajoitettu* jos on olemassa sellainen luku M , että $a_n \leq M$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$. Lukujono on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ aina, kun $n \in \mathbb{N}$.

Ylhäältä rajoitettuja, kasvavia reaalilukujonoja koskee seuraava teoreettisesti tärkeä tulos.

Lause 1 *Ylhäältä rajoitettu, kasvava reaalilukujono a_n suppenee.*

Huomautus 1 Intuitiivisesti edellinen lause on melko ilmeinen: jos jono on kasvava, mutta sillä on kuitenkin yläraja, on jonon jäsenten pakko ”kasautua” johonkin pisteeseen, mikä varsin ilmeisesti onkin se raja-arvo, jota jono lähenee. Lauseen syvällisyys ilmeneekin siinä, että se puhuu reaalilukujen ominaisuudesta: lause nimittäin väittää, että ”kasautumispiste” kaikille ylhäältä rajoitetuille, kasvaville jonoille on olemassa.

Todistus Koska a_n on ylhäältä rajoitettu, on joukolla $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ jokin yläraja. Reaalilukujen täydellisyysaksiooman perusteella (kts. Insinöörimatematiikka A) joukolla S on tällöin myös *pienin* yläraja $A = \sup S$. Osoitetaan, että $\lim a_n = A$. Olkoon $\epsilon > 0$ mikä hyvänsä, jolloin $A - \epsilon$ ei siis enää ole joukon S yläraja, sillä A on ylärajoista *pienin*. Koska $A - \epsilon$ ei ole joukon S yläraja, on olemassa sellainen joukon S alkio a_{M_ϵ} , että $a_{M_\epsilon} > A - \epsilon$. Koska jono a_n on kasvava, on $a_n \geq a_{M_\epsilon}$ aina, kun $n \geq M_\epsilon$.

Tällöin arvoilla $n \geq M_\epsilon$ on voimassa (muista että A on joukon S yläraja, siis $a_n \leq A$ aina)

$$d(a_n, A) = A - a_n \leq A - a_{M_\epsilon} < A - (A - \epsilon) = \epsilon,$$

mikä määritelmän mukaan merkitsee sitä, että $\lim a_n = A$. □

Huomautus 2 Tarkastelemalla jonoa $-a_n$ jonon a_n sijaan voidaan edellisen lauseen tuloksesta nähdä helposti, että alhaalta rajoitetut, vähenevät lukujonot suppenevat.

Huomautus 3 Reaalilukujen täydellisyysaksioma (kutsutaan sitä nimellä TA) sanoo, että ylhäältä rajoitetuilla, epätyhjiillä joukoilla S on *pienin yläraja* (merkitään $\sup S$). Kutsutaan edellisen lauseen tulosta, siis sitä, että kasvavat, ylhäältä rajoitetut jonot suppenevat nimellä JS. Tällöin ylläolevassa lauseessa on siis johdettu oletuksesta TA tulos JS.

Myös käänteinen tulos voidaan johtaa: ominaisuudesta JS seuraa TA, mikä merkitsee sitä, että reaalilukuja määriteltäessä ominaisuudet JS ja TA ovat tasavertaiset: TA voidaan korvata JS:llä tai päinvastoin.

Esimerkki 3 Olkoon

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ja osoitetaan, että jono a_n on kasvava. Tätä varten lasketaan

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n+1}{n} \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n} \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\ &\geq \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n} \frac{n}{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Toisen ja kolmannen rivin välistä suuruusarviota varten on käytetty Bernoullin epäyhtälöä (Insinöörimatematiikka A) $(1+x)^n \geq 1+nx$, joka pätee kun $x \geq -1$ ja $n \in \mathbb{N}$. Yllä olevasta epäyhtälöstä seuraa, että $a_{n+1} \geq a_n$, siis lukujono a_n on kasvava.

Osoitetaan vielä että jono a_n on ylhäältä rajoitettu. Tätä varten arvioidaan aluksi lauseketta $\binom{n}{i} \frac{1}{n^i}$. Kun $i \geq 2$, saadaan

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{1}{n^i} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-i+1)}{i!} \frac{1}{n^i} \leq \frac{\overbrace{n \cdot \dots \cdot n}^{i \text{ kpl}}}{i!} \frac{1}{n^i} \\ &= \frac{1}{i!} = \frac{1}{i \cdot (i-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \leq \frac{1}{\underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}_{i \text{ kpl}}} = \frac{1}{2^{i-1}}. \end{aligned}$$

Binomikaavalla saadaan

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = 1 + 1 + \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \leq 2 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2^{i-1}} \\ &= 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{2^i} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \end{aligned}$$

siis jono $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ on ylhäältä rajoitettu. Koska se on myös kasvava, on sillä lauseen 1 mukaan raja-arvo. Tätä raja-arvoa merkitään

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ja kutsutaan *Neperin vakioksi*. Luku $e = 2,7182818284590452354 \dots$ on *luonnollisen logaritmin* kantaluku ja e -kantisella eksponenttifunktiolla $f(x) = e^x$ on se ainutlaatuinen ominaisuus, että $f'(x) = f(x)$ (ja $f(0) = 1$). On mahdollista perustella tämä ominaisuus käyttämällä yllä olevaa määritelmää Neperin vakiolle.

Määritelmä 4 Olkoon a_1, a_2, a_3, \dots lukujono. Määritellään *osasummien jono* S_1, S_2, S_3, \dots ehdolla $S_n = a_1 + \dots + a_n$ ja sanotaan, että *sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), mikäli lukujono S_n suppenee. Muutoin sarja *hajaantuu* (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$). Suppenevassa tapauksessa sarjan *summaks*i määritellään

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n.$$

Huomautus 4 Edellisen määritelmän tavoin määritellään sarja

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n,$$

missä $k \in \mathbb{Z}$ on mikä hyvänsä kokonaisluku.

Esimerkki 4 Sarja $1 + 1 + 1 + \dots$ hajaantuu, koska osasummien jono $S_n = n$ hajaantuu. Samoin sarja $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ hajaantuu, koska osasummien jono $S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1})$ hajaantuu.

Esimerkki 5 (Harmoninen sarja)

Osoitetaan, että sarja $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ hajaantuu. Tätä varten tarkastellaan osasummaa S_{2^k} ja ryhmitellään summattavat seuraavasti:

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{2^{k-1} \text{ kpl}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{2^{k-1} \text{ kpl}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1} \text{ kpl}} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k \text{ kpl}} = 1 + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Täten siis osasummalle S_{2^k} pätee $S_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$, mistä nähdään, että $S_{2^k} \rightarrow \infty$, kun $k \rightarrow \infty$. Tästä seuraa, että osasummien jono ja siis myös sarja $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ hajaantuu. Sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

kutsutaan *harmoniseksi sarjaksi*.

Esimerkki 6 Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \tag{2.1}$$

suppenee ja lasketaan sen summa. Tätä varten etsitään osamurtohajotelma $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ja kirjoitetaan osasumma S_n muotoon

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

sillä kussakin summattavassa jälkimmäinen yhteenlaskettava kumoaa seuraavan ensimmäisen. Tästä nähdään, että $\lim S_n = 1$, siis sarja (2.1) suppenee kohti lukua 1.

Esimerkki 7 Osoitetaan, että sarja

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \quad (2.2)$$

suppenee. Tätä varten arvioidaan osasummaa S_{n+1} seuraavasti:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \leq 2. \end{aligned}$$

Viimeisin epäyhtälö seuraa aiemman esimerkin ylärajasta. Tämä merkitsee sitä, että osasummien jono S_n on ylhäältä rajoitettu, ja koska $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2}$, on se myös kasvava. Lauseen 1 perusteella jonolla S_n on raja-arvo S , mikä merkitsee siis sitä, että sarja (2.2) suppenee.

Huomautus 5 Sarjan (2.2) summa on myös mahdollista laskea. Esimerkiksi myöhemmin käsiteltävien Fourier-sarjojen avulla voidaan osoittaa, että

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.1 Sarjojen perusominaisuuksia

Seuraavassa lauseessa luetellaan tärkeimpiä suppenevien sarjojen ominaisuuksia.

Lause 2

1. Jos sarjat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat, niin myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

suppenee ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

2. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ($k > 1$) suppenee, ja tällöin on

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

3. Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee, niin myös $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. Mikäli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee, sanotaan, että

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti. Tällöin pätee

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Huomautus 6 Lauseen 1. kohdan mukaan tavanomaiset summan käsittelysäännöt pätevät, mikäli molemmat sarjat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat. Kohdan 2 mukaan sarjan suppeneminen ei riipu mistään sen alkuosasta. Kohta 3 on äärellisille summille pätevän *kolmioepäyhtälön* yleistys suppeneville sarjoille.

Lauseessa mainittuja ominaisuuksia on syytä verrata Insinöörimatematiikka B:ssä esitettyihin analogisiin I lajin epäoleellisten integraalien ominaisuuksiin.

2.2 Geometrinen sarja

Määritelmä 5 Lukujono a_1, a_2, a_3, \dots on *geometrinen*, jos kahden peräkkäisen jäsenen a_{n+1} ja a_n suhde on vakio: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (tällöin siis $a_{n+1} = qa_n$). Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

on geometrinen, jos jono a_1, a_2, a_3, \dots on geometrinen.

Geometrisen sarjan jäsenet määräytyvät yksikäsitteisesti suhdelvasta q ja ensimmäisestä jäsenestä $a_1 = a$. Tällöin $a_2 = aq$, $a_3 = a_2q = aq^2$, $a_4 = a_3q = aq^3$, jne.

Geometrisen sarjan osasummien

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} \quad (2.3)$$

avulla voidaan myös suppenemiskysymys ja summa määrittää seuraavasti: Kertomalla (2.3) suhdelvalla q saadaan

$$qS_n = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n, \quad (2.4)$$

ja vähentämällä (2.4) yhtälöstä (2.3) saadaan

$$(1 - q)S_n = a - aq^n = a(1 - q^n),$$

joten osasummalle S_n saadaan lauseke (tapaus $q = 1$ on helppo mutta käsiteltävä erikseen)

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad (2.5)$$

ja tästä saadaan seuraava tulos:

Lause 3 *Geometrisen sarja*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

suppenee tarkalleen silloin, kun $|q| < 1$. Suppenevassa tapauksessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a \frac{1}{1 - q}.$$

Esimerkki 8 Akilles kulkee kymmenen kertaa nopeammin kuin kilpikonna. Akilleen ja kilpikonna kilpajuoksussa kilpikonna saa kymmenen metrin etumatkan. Kun Akilles on saavuttanut kilpikonna lähtöpisteen, on kilpikonna edennyt tästä metrin eteenpäin. Kun Akilles saavuttaa tämän pisteen, on kilpikonna

edennyt tästä 10 cm eteenpäin. Kun Akilles saavuttaa tämän pisteen, on kilpikonna edennyt tästä 1 cm eteenpäin, jne.

Akilleen saavuttaessa kilpikunnan aiempi olinpaikka on kilpikonna ehtinyt jälleen edetä eteenpäin $1/10$ matkasta, joka oli Akilleen tavoitettavana aiemmin. Seuraako tästä, että Akilles ei koskaan saavuta kilpikonnaa?

Valitaan ajan yksiköksi se aika, jossa Akilles saavuttaa lähtökohdastaan kilpikunnan lähtökohdan. Kilpikunnan lähtöpaikkaa tavoittaessaan Akilles on siis kilpikunnan takana ajan 1. Tavoittaessaan sitä paikkaa, mihin kilpikonna siirtyi ajan 1 kuluessa on Akilles kilpikunnan takana ajan $\frac{1}{10}$. Tänä aikana on kilpikonna jälleen ehtinyt siirtyä seuraavaan paikkaan, jota tavoittaessa Akilles käyttää ajan $\frac{1}{100}$, jne. Tällöin kokonaisaika, jonka Akilles on kilpikunnan takana, on

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

Kokonaisaika, jonka Akilles on on kilpikunnan takana, on siis äärellinen $\frac{10}{9}$, ja Akilles ohittaa kilpikunnan tämän ajan kuluttua.

Mahdollinen paradoksaalinen johtopäätös, jonka mukaan Akilles ei voi koskaan saavuttaa kilpikonnaa, selittyy siten, että vaikka *ajanhetkiä* jolloin Akilles on kilpikunnan takana onkin ääretön määrä, on silti *kokonaisaika*, jonka Akilles on kilpikunnan takana äärellinen.

2.3 Desimaaliesitys

Reaalilukujen desimaaliesitys lienee käytetyin esimerkki suppenevasta sarjasta, jonka taustalla voidaan nähdä geometrinen sarja. Esimerkiksi esityksessä

$$\pi = 3,141592653589793\dots \quad (2.6)$$

3 viittaa luvun π kokonaisuosaan, 1, kymmenesosiin, 4 sadasosiin, 1 tuhannesosiin, jne. Desimaaliesitys (2.6) tarkoittaa siis lukua

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots$$

Yleisemmin desimaaliesitys tarkoittaa lukua

$$k + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots, \quad (2.7)$$

missä $k \in \mathbb{Z}$ ja $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Voidaan luonnollisestikin kysyä, määrääkö esitys (2.7) aina jonkin reaaliluvun, toisin sanoen, suppeneeko sarja (2.7) kaikilla jonon a_1, a_2, a_3, \dots valinnoilla ($a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$).

Vastaus tähän kysymykseen on varsin helppo, sillä sarjassa (2.7) osoittajat a_i ovat rajoitettuja: $a_i \leq 9$, ja siis

$$\begin{aligned} k + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} &\leq k + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots + \frac{9}{10^n} \\ &= k + 9 \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} - 9 \leq k + 9 \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 9 = k + 1, \end{aligned}$$

joten siis osasummien $S_n = k + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$ jono on ylhäältä rajoitettu. Koska S_n on selvästikin kasvava jono, se suppenee lauseen (1) perusteella.

Edellä nähtiin siis että kukin jono k, a_1, a_2, a_3, \dots , ($k \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$) määrittelee reaaliluvun esityksen (2.7) kautta. Edelleen voidaan kysyä, onko sitten *jokaisella* reaaliluvulla olemassa desimaaliesitys. On melko helppoa nähdä (harjoitustehtävä), että näin todellakin on asianlaita: jokaisella reaaliluvulla on desimaaliesitys. Sen sijaan, ehkä hieman yllättäen, voidaan nähdä, että desimaaliesitys ei välttämättä ole yksikäsitteinen, vaan että joillakin reaaliluvuilla voi olla kaksi eri desimaaliesitystä.

Esimerkki 9 Olkoon $\alpha = 0,999\dots$, mikä siis tarkoittaa sitä, että

$$\alpha = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots = 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 1.$$

Toisaalta luvulla 1 on myös desimaaliesitys $1 = 1,000\dots$, mitä vastaa sarja

$$1 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \dots$$

Voidaan näyttää toteen, että reaalityluvulla $\alpha \neq 0$ on kaksi eri desimaaliesitystä vain silloin, kun sillä on päättyvä esitys (desimaaliesitystä kutsutaan päättyväksi, jos se sisältää jostain rajasta alkaen pelkkiä nollia).

Esimerkki 10 Samoin kuin edellä, nähdään, että $0,2000\dots = 0,1999\dots$. Reaalilukujen kaksi eri desimaaliesitystä liittyvät toisiinsa aina tämän esimerkin mukaisella tavalla: esitys, joka koostuu kokonaan nolista jostain rajasta alkaen voidaan korvata esityksellä, joka koostuu kokonaan yhdeksiköistä samasta rajasta alkaen, kun edellistä desimaalia vähennetään yhdellä.

On myös helppo havaita, että reaalityluvun desimaaliesitys on jaksollinen (jostakin rajasta alkaen) tarkalleen silloin kun luku on rationaalinen. Jaksollisen (jostakin rajasta alkaen) reaalityluvun esitys kahden kokonaisluvun osamääränä saadaan aina seuraavan esimerkin tavalla:

Esimerkki 11 Olkoon $\alpha = 4,3254545454\dots$. Tällöin $100\alpha = 432,545454\dots$ ja vähennyslaskulla saadaan

$$\begin{array}{r} 100\alpha = 43254545454\dots \\ - \quad \alpha = \quad 432545454\dots \\ \hline 99\alpha = 4282200000\dots, \end{array}$$

mistä saadaan $\alpha = \frac{428,22}{99} = \frac{42822}{9900} = \frac{2379}{550}$

2.4 Suppenemiskriteereitä

Aiempien esimerkkien perusteella sarjojen suppenemiskysymyksen ratkaiseminen vaikuttaa työläältä, mutta kuitenkin on mahdollista johtaa yleisiä periaatteita, joiden avulla suppenemiskysymys voidaan ainakin joidenkin sarjojen osalta ratkaista. Esitetään aluksi kriteeri, jonka perusteella voidaan joissakin tapauksissa päätellä, että sarja *ei* supene.

Lause 4 Jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.8}$$

suppenee, niin $\lim a_n = 0$. Tällöin siis sarja hajaantuu, mikäli $\lim a_n \neq 0$.

Todistus Merkitään $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Oletetaan, että sarja (2.8) suppenee, mikä merkitsee että raja-arvo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n = S$ on olemassa. Tällöin $S_n - S_{n-1} = a_n$ ja $\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$.

Huomautus 7 Ehto $\lim a_n = 0$ on edellisen lauseen mukaan välttämätön sarjan (2.8) suppenemiselle, mutta ei kuitenkaan riittävä. Esimerkin 5 harmoniselle sarjalle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nimittäin pätee $\lim \frac{1}{n} = 0$, mutta siitä huolimatta sarja hajaantuu.

Niin kutsuttu *Cauchyn suppenemisehto* sivuaa edellistä kriteeriä. Cauchyn ehto on lähinnä teoreettinen eikä yleensä sovellu suppenemiskysymyksen ratkaisemiseen käytännössä.

Lause 5 (Cauchy'n suppenemisehto)

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin, kun

$$\sum_{n=M}^{M+k} a_n$$

saadaan miten lähelle nollaa hyvänsä valitsemalla M riittävän suureksi (riippumatta siitä miten $k \geq 0$ on valittu). Tarkemmin ilmaistuna, sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin, kun jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa rajaluku M_ϵ siten, että

$$\left| \sum_{n=M}^{M+k} a_n \right| \leq \epsilon$$

kaikille $k \geq 0$, kunhan $M \geq M_\epsilon$.

Todistus Sivuuutetaan, mutta huomautetaan, että vastaava kriteeri pätee myös I lajin epäoleellisille integraaleille: integraali $\int_1^{\infty} f(t) dt$ suppenee tarkalleen silloin, kun

$$\int_M^{M+k} f(t) dt$$

saadaan mielivaltaisen lähelle nollaa valitsemalla M riittävän suureksi ja $k \geq 0$ miten hyvänsä.

Yleisesti voidaan todeta, että monet summiin liittyvät käsitteet ovat vaikeammin tavoitettavissa kuin vastaavat integraaleihin liittyvät käsitteet, esimerkiksi summan

$$S_l(n) = \sum_{k=1}^n k^l = 1^l + 2^l + \dots + n^l$$

lauseketta suljetussa muodossa on vaikea saada esille (suljetulla muodolla tarkoitetaan lauseketta $S_0(n) = n$, $S_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$, $S_2(n) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$ jne.), kun taas integraali

$$I_l(n) = \int_0^n t^l dt = \frac{1}{l+1} n^{l+1}$$

on varsin helppo määrittää.

Suppenemiskysymyksen osalta yhteys integraalien ja sarjojen välillä on kuitenkin suoraviivaisempi:

Lause 6 Olkoon f välillä $[1, \infty)$ määritelty vähenevä funktio, joka saa vain ei-negatiivisia arvoja. Tällöin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

suppenee tarkalleen silloin kun integraali

$$\int_1^{\infty} f(t) dt$$

suppenee.

Todistus Oletusten perusteella sarjan sekä integraalin ainoa mahdollinen hajaantumisen muoto on se, että arvo lähestyy ääretöntä. Insinöörimatematiikka B:ssä esitetyn Eulerin-Maclaurinin summakaavan mukaan

$$\sum_{n=1}^M f(n) = \int_1^M f(t) dt + \frac{f(1) + f(M)}{2} + \int_1^M f'(t)(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}) dt.$$

Virhetermiä arvioitaessa otetaan huomioon, että f on vähenevä, joten $f'(t) < 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} \left| \int_1^M f'(t)(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}) dt \right| &\leq \int_1^M \left| f'(t)(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}) \right| dt \leq \int_1^M |f'(t)| \frac{1}{2} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^M f'(t) dt = \frac{1}{2}(f(1) - f(M)). \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^M f(n) - \int_1^M f(t) dt \right| &= \left| \frac{f(1) + f(M)}{2} + \int_1^M f'(t)(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}) dt \right| \\ &\leq \left| \frac{f(1) + f(M)}{2} \right| + \left| \frac{f(1) - f(M)}{2} \right| \leq f(1) + f(M) \leq f(1) + f(1) = 2f(1). \end{aligned}$$

Väite seuraa tästä suoraan.

Esimerkki 12 Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ suppenee tarkalleen silloin kun integraali $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} dt$ suppenee, mikä tapahtuu tarkalleen silloin kun $s > 1$. Erityisesti voidaan havaita uudelleen, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu, mutta että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee.

Määritelmien perusteella voidaan saada integraalien ominaisuuksia vastaava tulos sarjoille:

Lause 7 (Minorantti-majoranttiperiaate) Oletetaan, että jostakin rajasta lähtien $|a_n| \leq b_n$. Tällöin

1. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenee, niin myös $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee (vieläpä itseisesti)
2. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hajaantuu, niin myös $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hajaantuu.

Esimerkki 13 Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ suppenee itseisesti, sillä $\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, ja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee.

Esimerkki 14 Sarjalle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n\sqrt{n} + 1}$ voidaan löytää minorantti:

$$\frac{n}{n\sqrt{n} + 1} \geq \frac{n}{n\sqrt{n} + n\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Koska sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ hajaantuu (vrt. vastaava integraali $\int_1^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$), tekee myös majoranttisarja

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n\sqrt{n} + 1}$ samoin.

Samoin kuin integraaleille, voidaan myös sarjoille esittää vertailutarkastimet raja-arvomuodossa.

Lause 8 Oletetaan, että $\lim \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = L$. Tällöin

1. Jos $L = 0$, niin sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ suppenemisesta seuraa sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppeneminen.

2. Jos $0 < L < \infty$, niin sarjoilla $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ on samanlainen suppenemiskäyttäytyminen.

3. Jos $L = \infty$, niin sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ hajaantumisesta seuraa sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hajaantuminen.

Todistus Seuraa suoraan vastaavasta lauseesta I lajin epäoleellisille integraaleille.

Sarjoille on olemassa myös oma suppenemiskriteerinsä, jota *ei esiinny* I lajin epäoleellisilla integraaleilla. Tässä kriteerissä käytetään sarjan peräkkäisten jäsenten osamäärän raja-arvoa.

Lause 9 (Osamäärätarkastin)

Jos sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on jostain rajasta M alkaen

1. $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$, (q vakio) niin sarja suppenee itseisesti.

2. $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Todistus Lauseen 2 kohdan 2 perustella riittää tarkastella tapausta $M = 1$. Lauseen todistus perustuu siihen, että 1-kohdassa saadaan sarjalle suppeneva geometrinen majorantti, ja 2-kohdassa hajaantuva geometrinen minorantti. Jos nimittäin kaikilla n :n arvoilla pätee $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$, on $|a_n| \leq q |a_{n-1}| \leq q^2 |a_{n-2}| \leq \dots \leq q^{n-1} |a_1|$. Täten siis sarjalla $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ on suppeneva majorantti $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} |a_1| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_1| q^n$, kun $q < 1$.

Hajaantumista koskeva väite todistetaan analogisesti.

Myös osamäärätarkastimesta saadaan helposti raja-arvomuoto, joka saattaa toisinaan olla helpommin käytettävissä kuin varsinainen osamäärätarkastin.

Lause 10 Olkoon $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$.

1. Jos $L < 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti.

2. Jos $L > 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Todistus Lauseen 9 tulokseen perustuva helppo harjoitustehtävä.

Huomautus 8 Lauseessa 9 tarvitaan todella ehto $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$, ehto $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ **ei riitä**. Voidaan nimittäin helposti huomata, että sekä hajaantuva sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ että suppeneva sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ molemmat toteuttavat ehdon $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

Sarjan itselleen suppenemiselle saadaan myös seuraava *juuritarkastin*.

Lause 11 (Juuritarkastin)

Jos sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on jostain rajasta alkaen

1. $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, niin sarja suppenee itseisesti
2. $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Todistus Kohdassa 1 saadaan suppeneva majorantti vielä helpommin kuin edellisessä lauseessa: ehdosta $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ seuraa, että $|a_n| \leq q^n$. Hajaantumista koskeva väite näytetään toteen analogisesti.

Myös juuritarkastimesta voidaan esittää raja-arvomuoto (harjoitustehtävä).

2.5 Vuorottelevat sarjat

Jos suppenevassa sarjassa on vain äärellinen määrä negatiivisia (tai positiivisia) termejä, on suppeneminen aina itseistä, sillä sarjan alkuosa ei vaikuta suppenemiseen. Ehdollinen suppeneminen voi siis tapahtua ainoastaan silloin, kun sarjassa on ääretön määrä sekä positiivisia että negatiivisia termejä. Tämänkaltaisista sarjoista tärkeimpiä ovat vuorottelevat sarjat.

Määritelmä 6 Jos $a_n \geq 0$, sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

on vuorotteleva.

Vuorotteleville sarjoille suppeneminen voidaan taata melko helposti:

Lause 12 (Leibniz)

Olkoon positiivilukujen jono a_n vähenevä ja $\lim a_n = 0$. Tällöin vuorotteleva sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \tag{2.9}$$

suppenee. Lisäksi kirjoitelmassa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = \sum_{n=1}^M (-1)^{n-1} a_n + R_M$$

jäännöstermi

$$R_M = (-1)^M a_{M+1} + (-1)^{M+1} a_{M+2} + (-1)^{M+2} a_{M+3} + \dots$$

on samanmerkkinen kuin ensimmäinen poisjätetty termi $(-1)^M a_{M+1}$ ja $|R_M| \leq a_{M+1}$.

Todistus Valitaan parillinen k (parittomalla arvolla vain merkinnät muuttuvat hieman) ja arvioidaan osasummien

$$S_{M+k} = (-1)^{1-1}a_1 + (-1)^{2-1}a_2 + \dots + (-1)^{M-1}a_M + \dots + (-1)^{M+k-1}a_{M+k}$$

sekä

$$S_M = (-1)^{1-1}a_1 + (-1)^{2-1}a_2 + \dots + (-1)^{M-1}a_M$$

erotusta. Ensinnä todetaan, että

$$\begin{aligned} & (-1)^M(S_{M+k} - S_M) \\ &= \underbrace{a_{M+1} - a_{M+2}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{M+3} - a_{M+4}}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{a_{M+k-1} - a_{M+k}}_{\geq 0} \\ &\geq 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \end{aligned}$$

ja toisin ryhmittelemällä

$$\begin{aligned} & (-1)^M(S_{M+k} - S_M) \\ &= a_{M+1} - \underbrace{(a_{M+2} - a_{M+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{M+4} - a_{M+5})}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{a_{M+k}}_{\geq 0} \\ &\leq a_{M+1} \end{aligned}$$

Kahdesta edellä saaduista arvoista seuraa, että

$$0 \leq |S_{M+k} - S_M| \leq a_{M+1}.$$

Koska oletuksen mukaan $\lim a_n = 0$, saadaan a_{M+1} miten pieneksi hyvänsä valitsemalla M riittävän suureksi. Tällöin sarjan (2.9) suppeneminen seuraa Cauchyn suppenemisehdosta (lause 5).

Kun merkitään sarjan summaa S :llä, voidaan jäännöstermi kirjoittaa muotoon

$$(-1)^M R_M = (-1)^M(S - S_M) = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^M(S_{M+k} - S_M),$$

mistä aikaisempien arvioiden mukaan saadaan $0 \leq (-1)^M R_M \leq a_{M+1}$.

Esimerkki 15 Koska $\lim \frac{1}{n} = 0$, voidaan edellisen lauseen perusteella todeta, että sarja

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \tag{2.10}$$

suppenee. Myöhemmin nähdään, että tämän sarjan summa on $\ln 2$, mutta tässä voidaan todeta, että sarja (2.10) suppenee vain ehdollisesti: itseisarvot ottamalla saadaan harmoninen sarja

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$$

jonka on jo aiemmin todettu hajaantuvan. Jos sarjan (2.10) summa haluttaan määrittää siten että virhe on korkeintaan $\frac{1}{10^3}$, tulee edellisten arvioiden mukaan laskea yhteen tuhat ensimmäistä termiä.

2.6 Termien järjestyksenvaihto, Cauchyn tulo

Verrattaessa sarjoja äärellisiin summiin voidaan aluksi todeta, että **suppenevassa tapauksessa voidaan sulkeita asetella aivan kuten äärellisissäkin summissa**. Tällöin nimittäin sulkeistamalla saadun sarjan osasummien jono on alkuperäisen sarjan osasummien jonon osajono, joka siten suppenee kohti alkuperäisen sarjan summaa. Sen sijaan sulkeiden poistaminen sarjasta voi olla ongelmallista.

Esimerkki 16 Vuorottelevien sarjojen yhteydessä havaittiin, että sarja

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (2.11)$$

suppenee. Sulkeita asettamalla saadaan positiiviterminen sarja

$$\begin{aligned} S &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}, \end{aligned}$$

joka suppenee myös ja sen summa on sama kuin alkuperäisenkin sarjan summa.

Esimerkki 17 $(1-1) + (1-1) + (1-1) \dots$ esittää triviaalisti suppenevaa sarjaa $0 + 0 + 0 + \dots = 0$, mutta sulkeet poistamalla saadaan sarja

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

joka hajaantuu.

Myös muita eroja sarjojen ja äärellisten summien välillä voidaan huomata. On nimittäin mahdollista todistaa, että ehdollisesti suppenevasta sarjasta saadaan termien järjestystä vaihtamalla sekä hajaantuva sarja että sarja, joka suppenee kohti mitä tahansa annettua reaalilukua.

Missä hyvänsä sarjassa voidaan aina vaihtaa äärellisen monen termin järjestystä sarjan suppenemisen tai summan siitä kärsimättä. Jos nimittäin vaihdetaan vain termien a_1, \dots, a_M järjestystä, voidaan kirjoittaa

$$S = \sum_{n=1}^M b_n + \sum_{n=M+1}^{\infty} a_n,$$

missä jono b_1, \dots, b_M on saatu jonosta a_1, \dots, a_M järjestystä vaihtamalla. Tällöin

$$\sum_{n=1}^M b_n = \sum_{n=1}^M a_n,$$

eikä sarjan suppeneminen riipu sen alkupäästä, kuten jo aiemmin todettiin.

Jos suppeneminen on itseistä, voidaan termien järjestystä vaihtaa mielivaltaisesti.

Lause 13 *Jos sarja suppenee itseisesti, niin jokainen siitä termien järjestystä vaihtamalla saatu sarja suppenee (vieläpä itseisesti) kohti alkuperäisen sarjan summaa.*

Todistus Sivuutetaan. □

On mahdollista todistaa myös käänteinen tulos edelliselle lauseelle: Jos termien järjestyksenvaihto ei muuta suppenemista eikä summaa, niin silloin sarja suppenee itseisesti.

Edellä mainittujen tuloksien perusteella itseisesti suppenevat sarjat toteuttavat oleellisesti samankaltaiset laskulait kuin tavalliset äärelliset summat. Tarkastellaan lopuksi miten sarjojen tulo muodostetaan.

Määritelmä 7 Merkintä $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n$ tarkoittaa sarjaa, jonka termeinä ovat kaikki tulot $a_m b_n$, $m, n \geq 1$ jossakin järjestyksessä.

Lause 14 *Jos sarjat $S = \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ ja $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat itseisesti, niin jokainen tulosarja $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n$ suppenee itseisesti kohti tuloa TS .*

Todistus Sivuutetaan. □

Käyttökelpoinen järjestys *Cauchyn tulo* sarjojen tulon laskemiseksi saadaan muuttamalla indeksointi nolasta alkavaksi. Tällöin itseisesti suppenevien sarjojen $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Cauchyn tulo on sarja

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} a_m b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_{k-n} b_n \\ &= a_0 b_0 + a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 + \dots \\ &+ a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n + \dots \end{aligned}$$

Esimerkki 18 Kun $|x| < 1$, saadaan geometrisen sarjan avulla

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k x^{k-n} x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k. \end{aligned}$$

Luku 3

Funktiosarjat ja integraalin määrittelemät funktiot

Insinöörimatematiikka B:ssä ja tämän kurssin alkuosassa on käsitelty kahta toisilleen hyvin läheistä matemaattista objektia: I lajin epäoleellisia integraaleja ja sarjoja. Kummatkin ovat raja-arvoja äärellisellä välillä määritellyistä käsitteistä: I lajin epäoleellinen integraali saadaan raja-arvona integroinnin ylärajan kasvaessa:

$$\int_1^{\infty} f(t) dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(t) dt \quad (3.1)$$

ja sarja puolestaan saadaan raja-arvona summan ylärajan kasvaessa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^M f_n. \quad (3.2)$$

Sarjoja, kuin myös I lajin epäoleellisia integraaleja voidaan yhtä hyvin tarkastella myös muuttuvina objekteina. Jonon f_1, f_2, f_3, \dots , sijaan voidaan tarkastella jonoa $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ jolloin sarjan (3.2) summa $F(x)$ oletettavasti riippuu x :n arvosta. Näin päädytään *funktiosarjoihin*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (3.3)$$

Samoin myös integrandina toimivan funktion $f(t)$ sijaan voitaisiin tarkastella funktioita $f(t, x)$, jolloin ilmeisestikin I lajin integraalin (3.1)

$$F(x) = \int_1^{\infty} f(t, x) dt, \quad (3.4)$$

arvo riippuu x :n arvosta. Sanotaan, että (3.4) on *integraalin määrittelemä funktio*.

Huomautus 9 Johdannossa sekä esityksessä (3.3) esiintyi lisäksi kerroinjono a_0, a_1, a_2, \dots ja esityksessä (3.4) kerroinfunktio $a(t)$. Tässä kappaleessa voidaan kerroinjonon ajatella sisältyvän merkintään $f_n(x)$ ja kerroinfunktion merkintään $f(t, x)$.

Huomautus 10 Funktiosarjojen summan, samoin kuin integraalin määrittelemän funktion integroinnin alaraja voidaan ilman muuta valita toisinkin, ja epäoleellisuus voi esiintyä myös alarajalla.

Funktiosarjojen ja integraalin määrittelemien funktioiden teoriat ovat varsin samankaltaiset. Itse asiassa näiden käsitteiden samankaltaisuutta voitaisiin korostaa kirjoittamalla $f_n(x) = f(n, x)$, jolloin (3.3) voidaan kirjoittaa muotoon

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n, x),$$

mutta tämänkaltaista merkintää käytetään harvemmin. Yhtä lailla analogiaa korostaisi myös merkintä $f(t, x) = f_t(x)$, jolloin (3.4) voitaisiin kirjoittaa muotoon

$$F(x) = \int_1^{\infty} f_t(x) dt,$$

mutta tätäkin merkintää käytetään äärimmäisen harvoin.

Kiinteällä x :n arvolla funktiosarja palautuu tavalliseksi vakiosarjaksi samoin kuin integraalin määrittelemä funktio palautuu I lajin epäoleelliseksi integraaliksi. Näiden suppenemisen tarkastelemiseksi voidaan siis käyttää aiemmin opittuja suppenemiskriteerejä, mutta kiinnittämällä x vakioksi seuraavat kysymykset jäävät avoimiksi: millaisen funktion sarja (3.3) tai integraali (3.4) määrittelee? Mitkä funktioiden $f_n(x)$ ominaisuuksista esimerkiksi periytyvät sarjalle (3.3) ja mitkä funktioiden $f(t, x)$ ominaisuuksista funktiolle (3.4)? Kutsutaan funktiota $f_n(x)$ sarjan (3.3) ja funktioita $f(t, x)$ integraalin (3.4) *osafunktioiksi*.

Määritelmä 8 Sarja (3.3) suppenee välillä I , mikäli se suppenee jokaisella arvolla $x \in I$. Samoin määritellään integraalin (3.4) suppeneminen välillä I .

Esimerkki 19 Tunnetusti $1 + x + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, joten $F(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ suppenee, kun $x \in (-1, 1)$. Näin ollen jäännöstermille $R_n(x)$ pätee

$$|R_n(x)| = |F(x) - F_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x},$$

mistä nähdään, että jäännöstermin $R_n(x)$ saamiseksi ϵ :in päähän nolasta tulee n valita aina suuremmaksi mitä lähempänä $|x|$ on lukua 1. Tällöin sanotaan, että vaikka sarja

$$F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

suppenee välillä $(-1, 1)$, ei se suppene *tasaisesti* tällä välillä.

3.1 Summaus tai integrointi yli äärellisen välin

Tarkasteltaessa aluksi funktiosarjan sijaan äärellistä summaa

$$F_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$$

voidaan todeta, että osafunktioiden jatkuvuus, integroituvuus ja derivoituvuus periytyy suoraan summafunktiolle $S_N(x)$ ja integraalit ja derivaatat voidaan laskea termeittäin. Tämä seuraa mainittuja analyttisiä ominaisuuksia koskevista perustuloksista. Vastaava tulos pätee myös integraaleille.

Lause 15 Jos funktio $f : [1, N] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$F_N(x) = \int_1^N f(t, x) dt$$

on jatkuva välillä $[a, b]$. Jos kutakin $t \in [1, N]$ kohti $f(t, x)$ on integroitava yli välin $x \in [a, b]$, niin myös $F_N(x)$ on, ja

$$\int_a^b F_N(x) dx = \int_1^N \int_a^b f(t, x) dx dt.$$

Jos lisäksi $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) : [1, N] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin F_N on derivoituva ja

$$F'_N(x) = \int_1^N \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt$$

Todistus Sivuutetaan. □

Esimerkki 20 Olkoon $F(x) = \int_1^3 \frac{\sin xt}{t} dt$. Koska osafunktiot $\frac{\sin xt}{t}$ ovat jatkuvia, kun $t \in [1, 3]$ ja $x \in \mathbb{R}$, on myös $F(x)$ jatkuva. Lisäksi

$$F'(x) = \int_1^3 \frac{t \cos xt}{t} dt = \int_1^3 \frac{1}{x} \sin xt = \frac{1}{x}(\sin 3x - \sin x).$$

Lisäksi

$$\int_2^5 F(x) dx = \int_1^3 \int_2^5 \frac{\sin xt}{t} dx dt = \int_1^3 \left(\int_2^5 -\frac{\cos xt}{t^2} \right) dt = \int_1^3 \frac{\cos 2t - \cos 5t}{t^2} dt.$$

3.2 Tasainen suppeneminen

Edellisessä pykälässä esitetyt tulokset osafunktioiden ominaisuuksien periytymisestä eivät välttämättä päde, mikäli summan sijaan tarkastellaan sarjaa tai äärellisen välin integraalin sijaan I lajin epäoleellista integraalia. Tästä nähdään esimerkkejä myöhemmin Fourier'n integraalien ja Fourier'n sarjojen yhteydessä.

Esimerkki 21 Tarkastellaan miksi jatkuvuutta ei voida näyttää funktiosarjoille toteen ilman lisäoletuksia, vaikka kaikki osafunktiot olisivat jatkuvia. Olkoon

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

suppeneva sarja, kukin f_n jatkuva, ja yritetään näyttää toteen, että $F(x)$ olisi jatkuva. Tätä varten arvioidaan etäisyyttä

$$\begin{aligned} d(F(x), F(x_0)) &= |F(x) - F(x_0)| = \left| \sum_{n=1}^N f_n(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) - \left(\sum_{n=1}^N f_n(x_0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_0) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^N (f_n(x) - f_n(x_0)) + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_0) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^N (f_n(x) - f_n(x_0)) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_0) \right|. \end{aligned}$$

Itseisarvomerkkien sisällä esiintyvistä lausekkeista ensimmäinen on äärellinen summa, joten se saadaan jatkuvuuden perusteella mielivaltaisen pieneksi, kunhan x valitaan riittävän läheltä x_0 :aa. Seuraavat kaksi lauseketta puolestaan ovat suppenevan sarjan loppuosia, joten myös ne saadaan mielivaltaisen pieneksi, kunhan N valitaan riittävän suureksi.

Ongelmaksi muodostuu kuitenkin se, että jos toinen lauseke halutaan saada pienemmäksi kuin jokin ennalta annettu raja, tulee N valita tietyn rajan yläpuolelta. Tällöin taas ensimmäisen lausekkeen yhteenlaskettavien määrä voi tulla suureksi, ja sen saamiseksi ennalta annetun rajan alapuolelle saattaa vaatia x :n valitsemista aina vain lähempää x_0 :aa, jolloin taas toisen lausekkeen pieneksi saamiseen tulee ehkä N :ää kasvattaa, ja näin päädytään loputtomaan kierteseen.

Edellisen tarkastelun perusteella jatkuvuus voitaisiin näyttää toteen, mikäli sarjan loppuosia

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$$

saadaan pieneksi x :stä riippumatta. Tällöin sanotaan, että sarjan tai integraalin suppeneminen on *tasaista*, ja edellisen pykälän tulokset voidaan yleistää.

Määritelmä 9 Sarja

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

suppenee tasaisesti välillä I , mikäli jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen rajaluku M_ϵ , että

$$\left| \sum_{n=M}^{\infty} f_n(x) \right| < \epsilon,$$

jos $M \geq M_\epsilon$, olipa $x \in I$ valittu miten tahansa. Samoin integraalin

$$F(x) = \int_1^{\infty} f(t, x) dt$$

sanotaan suppenevan tasaisesti välillä I , jos jokaista positiivilukua ϵ kohti on sellainen rajaluku M_ϵ , että

$$\left| \int_M^{\infty} f(t, x) dt \right| < \epsilon,$$

jos $M \geq M_\epsilon$, olipa $x \in I$ valittu miten tahansa.

Huomautus 11 Tasaisen suppenemisen kannalta oleellista on lisämääre ”olipa $x \in I$ valittu miten tahansa”. Tämä nimittäin ilmaisee sen, että sarjan

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

ja integraalin

$$F(x) = \int_1^{\infty} f(t, x) dt$$

loppuosat

$$\sum_{n=M}^{\infty} f_n(x) \quad \text{ja} \quad \int_M^{\infty} f(t, x) dt$$

saadaan miten lähelle nollaa hyvänsä, kunhan summaus/integrointi aloitetaan riittävän suuresta luvusta M , riippumatta siitä miten x on valittu.

Tasainen suppenemisen määritelmää saattaa olla hankala käyttää sellaisenaan, mutta funktiosarjan, samoin kuin integraalin määrittelemän funktion tasaiselle suppenemiselle olemassa käyttökelpoinen kriteeri.

Lause 16 (Weierstrassin M -testi)

1) Jos on olemassa sellainen jono M_1, M_2, M_3, \dots , että

1. $|f_n(x)| \leq M_n$, kun $x \in I$ ja

2. sarja $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee,

niin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

suppenee tasaisesti välillä I .

2) Jos on olemassa sellainen funktio $M(t)$, että

1. $|f(t, x)| \leq M(t)$, kun $x \in I$ ja
2. integraali $\int_1^\infty M(t) dt$ suppenee,

niin integraali

$$\int_1^\infty f(t, x) dt$$

suppenee tasaisesti välillä I .

Todistus Sivuutetaan. □

Weierstrassin kriteerissä mainittu yläraja M_n tai $M(t)$ osafunktioille voidaan usein löytää valitsemalla suurin mahdollinen arvo x :lle tarkasteluvälillä.

Esimerkki 22 Jos $0 < a < 1$, saadaan esimerkin 19 sarjalle $|f_n(x)| = |x^n| \leq a^n$. Koska sarja $\sum_{n=0}^\infty a^n$ suppenee (geometrinen sarja, summa $\frac{1}{1-a}$), voidaan edellisen lauseen perusteella todeta, että esimerkin 19 sarja suppenee tasaisesti välillä $[-a, a]$.

Seuraavassa lauseessa esitetään tärkeimpiä ominaisuuksia, jotka periytyvät osafunktioilta $f_n(x)$ ja $f(t, x)$ sarjalle ja integraalille siinä tapauksessa, että suppeneminen tapahtuu tasaisesti.

Lause 17 Oletetaan, että funktiot $f_n(x)$ ovat jatkuvia välillä I , $f(t, x) : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva ja että sarja ja integraali

$$F_1(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x) \quad \text{ja} \quad F_2(x) = \int_1^\infty f(t, x) dt$$

suppenevat tasaisesti välillä I . Tällöin

1. $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ ovat jatkuvia välillä I .
2. $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ ovat integroituva välillä I ja

$$\int_a^b F_1(x) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_a^b f_n(x) dx$$

$$\int_a^b F_2(x) dx = \int_1^\infty \int_a^b f(t, x) dx dt$$

3. Jos $f'_n(x)$ on jatkuva välillä I ja $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva ja

$$\sum_{n=1}^\infty f'_n(x) \quad \text{sekä} \quad \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt$$

suppenevat tasaisesti välillä I , niin $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ ovat derivoituvia välillä I ja

$$F'_1(x) = \sum_{n=1}^\infty f'_n(x) \quad \text{sekä} \quad F'_2(x) = \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt.$$

Todistus Sivuutetaan, mutta huomautetaan, että jatkuvuus funktiosarjalle voidaan tasaisen suppenemisen tapauksessa todistaa esimerkissä 21 mainitulla tavalla. □

Esimerkki 23 Sarja

$$S(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n^2} \tag{3.5}$$

suppenee tasaisesti koko reaaliakselilla, sillä $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ ja sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee. Näin ollen funktio (3.5) on jatkuva koko reaaliakselilla, sillä kukin osafunktio $\frac{\sin nx}{n^2}$ on.

Esimerkki 24 Esimerkistä 22 seuraa, että sarja

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

suppenee tasaisesti välillä $[-a, a]$, missä $0 < a < 1$. Jos siis $0 \leq x \leq a$, saadaan puolittain integroimalla

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Summausindeksiä vaihtamalla saadaan siis

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad (3.6)$$

ja sarja (3.6) suppenee, kun $|x| < 1$. Toisaalta taas Leibnizin lauseen (lause 12) mukaan sarja (3.6) suppenee tasaisesti välillä $[0, 1]$, joten sen summafunktio on jatkuva tällä välillä. Koska myös $\ln(1+x)$ on välillä $[0, 1]$ jatkuva, ja sen arvo yhtyy sarjan (3.6) arvoon välillä $[0, 1)$, on arvojen oltava samat myös pisteessä $x = 1$. Näin ollen

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Esimerkki 25 Sarja

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

suppenee tasaisesti välillä $[-a, a]$ ($0 < a < 1$). Derivoimalla puolittain saadaan

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

Termeittäin derivointi onnistuu, koska myös derivaattasarja suppenee tasaisesti välillä $[-a, a]$ (miksi? Katso myös esimerkki 18).

Esimerkki 26 Aiemmin todettiin, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ suppenee tarkalleen silloin kun $s > 1$. On kuitenkin mahdollista laajentaa sarjan

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (3.7)$$

määrittelemä funktio koko kompleksitasoon lukuunottamatta pistettä $s = 1$. Reaalialueella sarjaa (3.7) kutsutaan toisinaan *yliharmoniseksi sarjaksi*, mutta sen määrittelemän funktion laajennusta taas *Riemannin ζ -funktioiksi*. Riemannin ζ -funktion nollakohtien sijainti kompleksitason alueessa $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ on yksi tärkeimmistä matematiikan toistaiseksi avoimista ongelmista. Riemannin ζ -funktion nollakohtien sijainnilla mainitussa alueessa on nimittäin suora yhteys alkulukujen jakauman määrittämiseen. Ns. *Riemannin hypoteesin* mukaan alueessa $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ sijaitsevien ζ -funktion nollakohtien reaalisiosa on $\frac{1}{2}$. Tämän hypoteesin oikeaksi todistamisesta on Clay Mathematics Institute luvannut miljoonan dollarin palkkion.

3.3 Potenssisarjat

Kurssilla Insinöörimatematiikka B tutustuttiin Taylorin polynomeihin sekä näiden erikoistapauksiin Maclaurinin polynomeihin.

Lause 18 (Taylorin polynomi) Oletetaan, että funktio f on $n+1$ kertaa derivoituva jossakin pisteen x_0 ympäristössä. Tällöin

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (3.8)$$

missä $\xi \in (x, x_0)$ tai $\xi \in (x_0, x)$.

Funktion f Taylorin polynomi pisteessä x_0 voidaan laajentaa *Taylorin sarjaksi*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

mikäli funktiolla f on kaikkien kertalukujen derivaatat jossakin pisteen x_0 ympäristössä. ja mikäli summan (3.8) jäännöstermi

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

lähenee nollaa, kun $n \rightarrow \infty$.

Esimerkki 27 Olkoon $f(x) = \sin x$ ja $x_0 = 0$. Tällöin $f^{(n)}(x)$ on joko $\pm \sin x$ tai $\pm \cos x$, joten $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq 1$. Jäännöstermille saadaan siis arvio

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Tällöin siis sinifunktiolla on koko reaaliakselilla suppeneva Taylorin sarja

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Taylorin sarjat ovat erikoistapauksia *potenssisarjoista*, joiden tärkeimpiä ominaisuuksia käsitellään tässä luvussa. Muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (3.9)$$

olevia sarjoja sanotaan *potenssisarjaksi* pisteessä x_0 . Kun tarvittaessa vaihdetaan muuttujaa ja merkitään $t = x - x_0$, voidaan olettaa, että $x_0 = 0$.

Yleisesti ottaen sarjojen suppenemista ei voida päätellä siitä, että sarjan termit lähestyvät nollaa. Potenssisarjojen kohdalla *melkein* tällainen päättely voidaan kuitenkin tehdä.

Lause 19 Jos *potenssisarjalle*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.10)$$

ja jollekin luvulle $c > 0$ pätee $\lim a_n c^n = 0$, niin (3.10) suppenee itseisesti välillä $(-c, c)$ ja tasaisesti kaikilla väleillä $[-a, a] \subseteq (-c, c)$. Jos taas jollekin luvulle c pätee $\lim a_n c^n \neq 0$, niin sarja (3.10) hajaantuu aina, kun $|x| \geq c$.

Todistus $|a_n x^n| = |a_n c^n| \left| \frac{x}{c} \right|^n \leq \left| \frac{x}{c} \right|^n$ (kun n on kyllin suuri), jolloin siis itseisarvoilla varustetulle sarjalle saadaan suppeneva majorantti. Jos lisäksi $|x| \leq a$, on majorantti riippumaton x :stä ja sarja suppenee tasaisesti M -testin perusteella.

Jos $\lim a_n c^n \neq 0$ ja $|x| \geq c$, niin $a_n x^n = a_n c^n (\frac{x}{c})^n$, eikä tämä lauseke lähene nollaa, sillä $a_n c^n$ ei tee niin. Näin ollen sarja ei suppene pisteessä x .

Edellisestä lauseesta seuraa, että potenssisarjojen suppenemiselle on kolme vaihtoehtoa:

- Sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ hajaantuu aina, kun $x \neq x_0$,
- On olemassa luku $R > 0$, jolle pätee: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ suppenee, kun $|x - x_0| < R$ ja hajaantuu, kun $|x - x_0| > R$
- Sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ suppenee aina, kun $x \in \mathbb{R}$.

Määritelmä 10 Yllämainittua lukua R , mikäli sellainen on olemassa, sanotaan potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *suppenemissäteeksi*. Jos potenssisarja hajaantuu kaikilla x :n arvoilla, sen suppenemissäteeksi määritellään $R = 0$ ja mikäli se suppenee kaikilla x :n arvoilla, merkitään $R = \infty$.

Esimerkki 28 Sarjalle $\sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2} x^n$ pätee

$$\sqrt[n]{e^{n^2} x^n} = e^n |x| > 1,$$

kun n on kyllin suuri ja $x \neq 0$. Juuritarkastimen (lause 11) mukaan sarja siis hajaantuu, kun $x \neq 0$. Näin ollen kyseisen sarjan suppenemissäde on 0.

Esimerkki 29 Sarjalle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pätee

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0,$$

kun $x \rightarrow \infty$. Osamäärätarkastimen (lause 9) nojalla kyseinen sarja siis suppenee kaikilla x :n arvoilla, joten sen suppenemissäde on $R = \infty$.

Lause 20 Sarjoilla $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ on sama suppenemissäde.

Todistus Jos $|n a_n c^{n-1}|$ lähenee nollaa, kun $n \rightarrow \infty$, tekee $|a_n c^n| = \frac{c}{n} |n a_n c^{n-1}|$ samoin.

Valitaan sitten $0 < c_1 < c$. Tällöin $|n a_n c_1^{n-1}| = |a_n c^n| n (\frac{c_1}{c})^n \frac{1}{c_1}$ ja koska $\lim n \alpha^n = 0$ kun $\alpha \in (0, 1)$, nähdään, että $|n a_n c_1^{n-1}|$ lähenee nollaa mikäli $|a_n c^n|$ tekee niin. Koska c_1 voidaan valita miten läheltä tahansa lukua c , seuraa väite lauseesta 19.

Kun kootaan yhteen edellisten lauseiden tulokset saadaan

Lause 21 Potenssisarjan summafunktio

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

on suppenemisvälillä $(-R, R)$

1. Jatkuva,

2. Integroituva ja $\int_a^b F(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx$, sekä

3. Derivoituva ja $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Myös derivaattasarjan suppenemissäde on R .

Seuraus 1 Potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ summafunktiolla $F(x)$ on kaikkien kertalukujen derivaatat ja $a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$.

Todistus Sijoitetaan $x = 0$ ja sovelletaan toistuvasti edellisen lauseen kohtaa 3.

Seuraus 2 (Potenssisarjojen identtisyyslause) Jos sarjat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ suppenevat jollakin

välillä $(-c, c)$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, niin tällöin $a_n = b_n$ kaikilla $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Huomautus 12 Edellämainitun perusteella voidaan havaita, että potenssisarjat ja Taylorin sarjat ovat lähestulkoon sama asia. Jos nimittäin potenssisarjalla on positiivinen suppenemissäde, määrittelee potenssisarja suppenemislähdöllään funktion, jonka Taylorin sarja se on.

Esimerkki 30 (Binomisarja) Olkoon α mikä hyvänsä reaaliluku. Funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$ derivaatat voidaan laskea: $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, ..., $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$.

Jos merkitään

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

(yleistetty binomikerroin), voidaan siis kirjoittaa

$$f^{(k)}(x) = k! \binom{\alpha}{k} (1+x)^{\alpha-k},$$

jolloin siis

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

ja funktiolla $f(x) = (1+x)^\alpha$ on olemassa Taylorin polynomi

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1},$$

missä $\xi \in (0, x)$. Jäännöstermiä

$$\binom{\alpha}{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$$

on kuitenkin hankala arvioida, mutta sarjan

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \tag{3.11}$$

suppeneminen voidaan osoittaa osamäärätarkastimen avulla:

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} x^n} \right| = \frac{|\alpha-n|}{n+1} |x| \rightarrow |x|,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Sarja (3.11) siis suppenee, kun $|x| < 1$. Näin on saatu ns. *Binomisarja*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad (3.12)$$

joka suppenee aina, kun $|x| < 1$.

Huomautus 13 Jos α on positiivinen kokonaisluku, on $\binom{\alpha}{n}$ sama kuin kurssilla Insinöörimatematiikka A määritelty binomikerroin ja $\binom{\alpha}{n} = 0$ aina, kun $n > \alpha$. Tällöin (3.12) palautuu äärelliseksi summaksi ja yhtälö (3.12) tavalliseksi binomikaavaksi.

Esimerkki 31 Valitsemalla binomisarjassa $\alpha = -\frac{1}{2}$ ja $x:n$ asemesta $-t^2$ saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^6 + \dots,$$

mistä integroimalla saadaan

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

Potenssisarjojen yleisten ominaisuuksien perusteella integroimalla saatu sarja suppenee siellä missä alkuperäinenkin, joten ylläoleva sarja suppenee, kun $|x| < 1$.

Luku 4

Sarjaopin sovelluksia

4.1 Eulerin kaava

Aiemmassa luvussa johdetusta sinifunktion Taylorin sarjasta

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

saadaan termeittäin derivoimalla Taylorin sarja kosinifunktiolle:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Eksponenttifunktion Taylorin sarja on myös helppo johtaa:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Tällöin

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Tämä on insinöörimatematiikka A:ssa esitetty Eulerin kaava. Eksponenttifunktion sarjan termien uudelleenjärjestely ei muuta sarjan summaa, koska sarja suppenee itseisesti.

On huomattava, että tällä kurssilla ei ole erityisesti käsitelty kompleksisten sarjojen teoriaa, mutta teorian pääpiirteet pysyvät samoina siirryttäessä reaalialueelta kompleksilukuihin. Weierstrassin M -testi tasaiselle suppenemiselle on pätevä, samoin kuin sovellettavissa olevat suppenemiskriteerit.

4.2 Generoivat funktiot ja rekursioyhtälöt

Lukujonojen analysoimiseksi ja ominaisuuksien selvittämiseksi voidaan toisinaan käyttää tekniikkaa, jossa lukujonon avulla määritellään funktio, jonka ominaisuuksista toivotaan saatavan selville lukujonoon liittyvää informaatiota.

Jos a_0, a_1, a_2, \dots on lukujono, sanotaan että

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4.1)$$

on jonon a_0, a_1, a_2, \dots generoiva funktio.

Esimerkki 32 Vakiojonon $1, 1, 1, \dots$ generoiva funktio on

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Esimerkki 33 Jonon $\frac{1}{0!} = 1, \frac{1}{1!} = 1, \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$, generoiva funktio on

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = e^x.$$

Aiempien lukujen perusteella voidaan generoivan funktion derivaatoista esittää seuraava tulos välittömästi.

Lause 22 Jos sarja (4.1) suppenee välillä $I = (-a, a)$, on funktiolla A kaikkien kertalukujen derivaatat välillä I , ja

$$A^{(n)}(0) = n!a_n.$$

Sarja (4.1) määrittelee jatkuvan funktion suppenemisalueellaan ja voidaan derivoida ja integroida termeittäin.

Positiivisen suppenemissäteen olemassaolo puolestaan voidaan taata sillä, että jono a_n kasvaa korkeintaan eksponentiaalisesti.

Lause 23 Jos on olemassa sellaiset positiiviluvut R ja M , että $|a_n| \leq R^n$ aina, kun $n \geq M$, niin sarja (4.1) suppenee välillä $(-\frac{1}{R}, \frac{1}{R})$.

Todistus Mainituilla oletuksilla $|a_n x^n| \leq (R|x|)^n$, missä $|R|x| < R \cdot \frac{1}{R} = 1$. Sarjalla on siis suppeneva geometrinen majorantti.

Huomautus 14 Yksipuolinen Z -muunnos tarkoittaa jonon $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ generoivaa funktiota, jossa muuttujan x paikalle sijoitetaan z^{-1} :

$$X(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + x_3 z^{-3} + \dots$$

Z -muunnosta käytetään digitaalisessa signaalinkäsittelyssä jonon x_0, x_1, x_2, \dots , analysoimiseksi. Tällöin kyse on generoivan funktion käsittelystä.

Kaksipuolinen Z -muunnos tarkoittaa molempiin suuntiin äärettömän jonon $\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$ kahdesta osasta koottua generoivaa funktiota:

$$X(z) = \dots + x_{-3}z^3 + x_{-2}z^2 + x_{-1}z + x_0 + x_1z^{-1} + x_2z^{-2} + \dots$$

Tarkastellaan generoivien funktioiden käyttöä *rekursioyhtälöiden* ratkaisemisessa seuraavan esimerkin avulla.

Määritelmä 11 *Fibonacciin luvut* määritellään seuraavasti: $F_0 = 1, F_1 = 1$, ja $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, kun $n \geq 0$.

Fibonacciin lukujonon ensimmäiset jäsenet ovat yllä olevan määritelmän mukaan siis $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$, jonon seuraava jäsen saadaan siis kahden edellisen summana. jonon F_0, F_1, F_2, \dots generoiva funktio:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} x^{n+2}$$

josta x :llä kertomalla saadaan

$$xF(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+1} = x + \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^{n+2}$$

ja edelleen

$$x^2 F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2}.$$

Tällöin

$$F(x) - xF(x) - x^2 F(x) = 1 + x - x + \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n+2} - F_{n+1} - F_n) x^{n+2} = 1,$$

joten

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Tällöin siis funktio $F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ pitää sisällään kaiken informaation Fibonaccin luvuista, ja tästä voidaan saada esille esimerkiksi eksplisiittinen esitysasu Fibonaccin luvuille.

Tätä varten etsitään osamurtohajotelma funktiolle $F(x)$: toisen asteen yhtälö ratkaisemalla saadaan $1 - x - x^2 = -(x - \alpha)(x - \beta)$, missä $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ja $\beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Näin saadaan

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{\alpha - \beta} \frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{\beta - \alpha} \frac{1}{x - \beta} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \beta} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha}} - \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 - \frac{x}{\beta}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha} \right)^n - \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\beta} \right)^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{\alpha} \right)^{n+1} - \left(\frac{1}{\beta} \right)^{n+1} \right) x^n. \end{aligned}$$

Tästä voidaan päätellä, että

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1}{\alpha} \right)^{n+1} - \left(\frac{1}{\beta} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Koska $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$ ja $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,61803\dots$, nähdään, että

$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1},$$

jossa likimääräistys tarkkenee n :n kasvaessa. Edelleen voidaan todeta, että

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Raja-arvoa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kutsutaan *kultaisen leikkauksen suhteeksi*. Tätä suhdetta on antiikin ajoista asti pidetty länsimaaisessa taiteessa ja arkkitehtuurissa erityisen esteettisenä rakennusten osien suhteille.

4.3 Sarjaratkaisut differentiaaliyhtälöille

Myöhemmin osoittautuu, että melko harvoille differentiaaliyhtälötyypeille on olemassa yleistä ratkaisumenetelmää. Sarjaoppi tarjoaa mahdollisuuden ratkaisujen löytämiseen joissakin sellaisissa tapauksissa, joissa aiemman menetelmät eivät toimi.

Luonnontieteissä, erityisesti fysiikassa erityisen tärkeitä ovat toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x),$$

joille ei kuitenkaan ole olemassa ratkaisukaavaa. Insinöörimatematiikka D:ssä tullaan kuitenkin huomamaan, että jos vastaavalle homogeeniselle yhtälölle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

löytyy jokin ratkaisu, niin alkuperäisen yhtälön kaikki ratkaisut voidaan löytää. Tällöin homogeenisen yhtälön ratkaisua voidaan etsiä merkitsemällä tuntematonta funktiota y potenssisarjalla

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots,$$

kehittämällä $a(x)$ ja $b(x)$ sarjoiksi, ja selvittämällä näin minkälainen on jono a_0, a_1, a_2, \dots

Esimerkki 34 Valon diffraktioon liittyvä Airyn differentiaaliyhtälö

$$y'' + xy = 0$$

on muodoltaan yksinkertainen, mutta mikään Insinöörimatematiikka D:ssä esitettävä yleinen ratkaisumenetelmä ei siihen pysty.

Valitaan alkuehdoiksi $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 1$ ja merkitään

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

jolloin alkuehdot merkitsevät, että $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ja

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ja

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Nyt siis

$$xy = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-2}$$

ja differentiaaliyhtälön vasen puoli saa muodon

$$y'' + xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-2} = 2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n(n-1)a_n + a_{n-3}) x^{n-2}.$$

Koska tämän pitää olla nolla kaikilla x :n arvoilla, on oltava $a_2 = 0$ ja

$$a_n = -\frac{1}{n(n-1)} a_{n-3}$$

kaikilla $n \geq 3$. Tällöin siis $a_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2} a_0 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3} a_1 = -\frac{1}{4 \cdot 3}$, $a_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4} a_2 = 0$, $a_6 = -\frac{1}{6 \cdot 5} a_3 = 0$, $a_7 = -\frac{1}{7 \cdot 6} a_4 = \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}$, jne ja

$$y(x) = x - \frac{1}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} x^7 - \dots$$

Näin saatu sarja suppenee kaikilla x :n arvoilla (miksi?), joten saatu sarja edustaa Airyn yhtälön ratkaisua koko reaaliakselilla.

Luku 5

Fourier'n sarjat

Funktiosarjoissa $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ summattavien funktioiden g_0, g_1, g_2, \dots ei periaatteessa tarvitse muodostaa erityisen systemaattista ja helposti kuvailtavaa kantafunktiosysteemiä, mutta sovellusten kannalta tämä olisi toivottavaa. Potenssisarjoissa kantafunktiosysteemi koostuu siirretyn muuttujan potensseista $(x - x_0)^n$, missä $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ja potenssisarja on näiden yhdistelmä (päättymätön summa):

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

missä kertoimet a_0, a_1, a_2, \dots pitää määrittää kutakin funktiota F ja kutakin tarkastelupistettä x_0 varten erikseen. Tämä on aiemmin selvitetty: $a_k = \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}$. Funktion $F(x)$ esittäminen potenssisarjana edellyttää kuitenkin, että F :llä on kaikkien kertalukujen derivaatat olemassa.

Fourier-sarjat, kuten muukin Fourier-analyysi rakentuu ajatukselle, jonka mukaan mitä hyvänsä funktioita pyritään esittämään trigonometristen funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ avulla. Koska mainitut funktiot edustavat selkeää aaltomuotoa, on uskottavaa, näitä muokkaamalla ja yhdistelemällä voidaan esittää hyvinkin monenlaista aaltoliikkeitä. Lisäksi trigonometrisilla funktioilla on differentiaali- ja integraalilaskennan kannalta käyttökelpoisia ominaisuuksia, esimerkiksi derivaattojen määrittäminen on yksinkertaista.

Edelleen on huomattava, että Eulerin kaava $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ kytkee yhteen kosinin, sinin ja kompleksisen eksponenttifunktion, joten Fourier-analyysi voidaan yhtäläillä perustaa funktioiden esitykselle kompleksisen eksponenttifunktion avulla. Tämä valitaankin kurssin pääasialliseksi näkökulmaksi.

Palautetaan mieleen Insinöörimatematiikka A:sta seuraava käsite:

Määritelmä 12 Funktiolla $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on jakso T , jos $f(x + T) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 35 Funktioilla $\sin x$, $\cos x$ ja e^{ix} on jakso 2π , kun taas funktioilla $\sin 2\pi x$, $\cos 2\pi x$ ja $e^{2\pi ix}$ on jakso 1.

Lause 24 Jos funktiolla on jakso T , on sillä myös jakso nT jokaista kokonaislukua n kohti.

Todistus Helppo, jätetään harjoitustehtäväksi. □

Otetaan käyttöön käsitteet f -taajuinen sini-, kosini- ja eksponenttifunktio, jotka perustetaan siihen ajatukseen, että välillä $[0, 1]$ funktio $\sin(2\pi x)$ toistaa jaksonsa tasan kerran, $\sin(2\pi \cdot 2x)$ kaksi kertaa, $\sin(2\pi \cdot 3x)$ kolme kertaa, jne.

Määritelmä 13 Määritellään f -taajuiset trigonometriset funktiot s_f ja c_f sekä eksponenttifunktiot seuraavasti:

- f -taajuinen sinifunktio määritellään $s_f(x) = \sin(2\pi f x)$ ja f -taajuinen kosinifunktio $c_f(x) = \cos(2\pi f x)$.
- f -taajuiset eksponenttifunktiot määritellään $e_{+f}(x) = e^{2\pi i f x}$ ja $e_{-f}(x) = e^{-2\pi i f x}$.

Suoraviivaisella laskulla nähdään, että

$$e_f(x + \frac{1}{f}) = e^{2\pi i f(x + \frac{1}{f})} = e^{2\pi i f x} e^{2\pi i} = e^{2\pi i f x} = e_f(x).$$

ja sama päättely pätee f -taajuiselle sini- ja kosinifunktiolle. Näin ollen kyseisillä funktioilla on jakso $T = \frac{1}{f}$. Tämä korostaa nimitystä ” f -taajuinen”, sillä ykkösen mittaisella reaaliakselin välillä funktiot $e_{\pm f}(x)$, $s_f(x)$ ja $c_f(x)$ toistavat samat jaksot f kertaa.

Esimerkki 36 Funktiolla $s_{50}(x) = \sin(2\pi \cdot 50x)$ on jakso $\frac{1}{50}$.

Lause 25 Kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ funktioilla $s_{\frac{n}{T}}(x)$, $c_{\frac{n}{T}}(x)$, ja $e_{\frac{n}{T}}(x)$ on jakso T .

Todistus Näytetään väite toteen eksponenttifunktiolle $e_{\frac{n}{T}}(x)$, muille todistus on samanlainen.

$$e_{\frac{n}{T}}(x + T) = e^{\frac{2\pi i n}{T}(x+T)} = e^{\frac{2\pi i n}{T}x} e^{\frac{2\pi i n}{T} \cdot T} = e^{\frac{2\pi i n x}{T}} = e_{\frac{n}{T}}(x).$$

Kurssilta insinöörimatematiikka B on erityisesti palautettava mieleen seuraava tulos:

Huomautus 15 T -jaksoisen eksponenttifunktion (joka ei ole vakio) integraali yli T -pituisen välin on nolla: jos $n \neq 0$, niin

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} e^{\frac{2\pi i n}{T}x} dx = \int_{\alpha}^{\alpha+T} \frac{T}{2\pi i n} e^{\frac{2\pi i n}{T}x} = \frac{T}{2\pi i n} (e^{\frac{2\pi i n}{T}(\alpha+T)} - e^{\frac{2\pi i n}{T}\alpha}) = 0$$

Jos taas $n = 0$, on integraalin arvo T .

Eksponenttimuodossa esitetyille Fourier'n sarjoille on Fourier'n integraalien lailla tyypillistä summauksen ulottuminen negatiivisesta positiiviseen äärettömyyteen, mutta sarjaopille ominaisen määritelmän (jonka mukaan sarja tulisi hajottaa kahteen osaan ja määrittää suppeneminen kummallekin erikseen) sijaan Fourier-sarjoille käytetään seuraavaa määritelmää:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M F_n.$$

Tämä vastaa tarkalleen kahteen suuntaan äärettömän integraalin määritelmää Cauchyn pääarvona (kts. Insinöörimatematiikka B):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(x) dx.$$

5.1 Fourier-sarjojen kompleksinen muoto

Määritelmä 14 Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -jaksoinen funktio. Tällöin funktion f (kompleksinen) Fourier-sarja on

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T}x}, \quad (5.1)$$

missä $F_n \in \mathbb{C}$ kaikille $n \in \mathbb{Z}$. Lukuja F_n kutsutaan funktion f Fourier-kertoimiksi tai *spektriiksi*. Lisäksi jokaista $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ kohti sanotaan, että funktiossa f esiintyy taajuus $\frac{n}{T}$, jos $F_n \neq 0$ tai $F_{-n} \neq 0$. Kerrointa F_n kutsutaan myös taajuuden $\frac{n}{T}$ *amplitudiksi* ja sen itseisarvo ilmaisee kuinka voimakkaasti taajuus $\frac{n}{T}$ esiintyy funktiossa f .

Fourier-sarjoja koskevat Fourier-analyysin peruskysymykset ovat seuraavanlaiset: Millä ehdoilla f on mahdollista esittää Fourier-sarjana (5.1) ja miten kerroinjono F_n saadaan selville, kun funktio f tunnetaan?

Huomautus 16 Taajuus fysikaalisena suureena on aina positiivinen, vaikka eksponenttifunktiot $e^{\frac{n}{T}x}$ esiintyvät myös negatiivisilla n :n arvoilla. Negatiivinen n :n arvo on kuitenkin vain matemaattinen esitystapa vailla fysikaalista tulkintaa, ja negatiiviset n :n arvot voidaan aina välttää käyttämällä reaalista esitystä, johon perehdytään myöhemmin.

Huomautus 17 Fourier-sarjana esitettävässä funktiossa 5.1 voi esiintyä vain taajuuksia $\frac{n}{T} = nf$, jolloin sanotaan että f :n spektri on *pistemäinen* tai *diskreetti*.

Huomautus 18 Jos tarkastellaan T -pituisella välillä $[\alpha, \alpha + T]$ määriteltyjä funktioita, joilla on Fourier'n sarja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x},$$

voidaan ajatella, että kertoimet F_n toimivat funktion f koordinaatteina systeemissä, jossa kantafunktioina ovat $e^{\pm \frac{2\pi i}{T} x}$. Funktiota f vastaa siis kahteen suuntaan päättymätön jono

$$(\dots, F_{-3}, F_{-2}, F_{-1}, F_0, F_1, F_2, F_3, \dots), \quad (5.2)$$

mikä omalla tavallaan merkitsee sitä, että Fourier-sarjojen avulla voidaan ainakin tietyssä mielessä "harventaa" funktion esitystä: Välin $[\alpha, \alpha + T]$ kaikkien arvojen (ylinumeroituva määrä, kts. Insinöörimatematiikka A) sijaan riittää em. kerroinjono (5.2) (numeroituva määrä) mistä funktion f kaikki arvot voidaan periaatteessa rekonstruoida. Sama havainto "harvennuksesta" toimii myös potenssisarjoille, mutta osoittautuu, että Fourier-sarjojen avulla esitettävien funktioiden joukko eroaa potenssisarjojen avulla esitettävästä oleellisesti: Fourier-sarjojen esittämät funktiot ovat jaksollisia, mikä ei päde potenssisarjoille. Sen sijaan potenssisarjojen esittämät funktiot ovat jatkuvia, mikä taas puolestaan ei välttämättä päde Fourier-sarjoille.

Palataan sarjaesityksen (5.1) yksityiskohtiin. Koska f on T -jaksollinen funktio, on kysymys Fourier'n sarjan olemassaolosta mielekkäästi asetettu: kukin funktio $x \rightarrow e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$ on T -jaksollinen funktio, joten tällöin myös sarjan (5.1) summa on sellainen, jos sarja suppenee. Tällöin tulee siis selvittää, miten kertoimet F_n määritetään. Tätä tarkoitusta varten taas voidaan käyttää huomautuksessa 15 mainittua integraalin ominaisuutta.

Selvitetään tuntemattomat kertoimet F_n seuraavasti: Jos

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x},$$

niin tällöin

$$f(x) e^{-\frac{2\pi i m}{T} x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i (n-m)}{T} x}$$

ja siis pitäisi olla

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-\frac{2\pi i m}{T} x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_{\alpha}^{\alpha+T} e^{\frac{2\pi i (n-m)}{T} x} dx.$$

Aiemmin todetun perusteella oikean puolen summassa esiintyvä integraali on 0, jos $n \neq m$, kun taas tapauksessa $n = m$ kyseessä on vakiofunktion 1 integraali yli välin $[\alpha, \alpha + T]$. Näin ollen

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-\frac{2\pi i m}{T} x} dx = F_m \cdot T,$$

mistä

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-\frac{2\pi i n}{T} x} dx. \quad (5.3)$$

Tämä näyttää siis vastaavan Fourier-analyysin peruskysymykseen Fourier-sarjojen kohdalla: Kertoimet F_n sarjaesitykseen (5.1) löydetään integraalilla (5.3). Funktiotarjojen teorian nojalla voidaan kuitenkin huomata, että vastaus on puutteellinen, sillä sarjan integroiminen termeittäin ei ole aivan suoraviivaista: Termeittäin integrointi onnistuu, jos sarja suppenee tasaisesti, mutta muutoin sitä ei voida taata.

Fourier-sarjoille voidaan kuitenkin todistaa seuraava tulos:

Lause 26 Jos T -jaksoisen funktion f toispuoleiset derivaatat $f'(x_0+)$ ja $f'(x_0-)$ ovat olemassa ja F_n määritetty kuten yhtälössä (5.3), niin sarja (5.1) suppenee pisteessä x_0 kohti arvoa $\frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$.

Edellä on merkitty $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ ja $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$.

Todistus Vaativa, sivuutetaan. □

Huomautus 19 Jos funktio f on edellisen lauseen ehtojen lisäksi jatkuva pisteessä x_0 , ovat vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot $f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)$ samat, jolloin Fourier-sarja suppenee kohti arvoa $f(x_0)$.

Huomautus 20 Määritettäessä Fourier-sarjan kertoimia luku α on vapaasti valittavissa. Tyypillisiä valintoja ovat $\alpha = 0$ tai $\alpha = -\frac{T}{2}$, missä T on jakson pituus. Jos tarkasteltava funktio f on alun perin jaksoton, saatava Fourier-sarja edustaa jaksollista funktiota, joka määrittyy funktion f arvoista välillä $[\alpha, \alpha + T]$.

Esimerkki 37 Olkoon $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0 \\ 1 & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$. Määritetään $f(x)$:lle Fourier-kertoimet F_n , kun määrittelyväliksi valitaan $[-\pi, \pi]$. Tällöin $T = 2\pi$ ja

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}.$$

ja kun $n \neq 0$, on

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{-in} e^{-inx} \\ &= -\frac{1}{2\pi in} (e^{-in\pi} - 1) = -\frac{1}{2\pi in} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{kun } n = 2k \text{ on parillinen,} \\ \frac{1}{\pi in} & \text{kun } n = 2k + 1 \text{ on pariton.} \end{cases} \end{aligned}$$

Esimerkki 38 Olkoon $\sigma_0(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$. Selvästi σ_0 on 1-jaksoinen funktio ja Fourier-sarja funktiolle f voidaan määrittellä esimerkiksi ottamalla lähtökohdaksi väli $[0, 1)$, jossa funktio yhtyy polynomiin $x - \frac{1}{2}$. Jos tällöin $n \neq 0$, on

$$\begin{aligned} F_n &= \int_0^1 f(x)e^{-\frac{2\pi in}{1}x} dx = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})e^{-2\pi inx} dx = \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) \frac{d}{dx} \frac{1}{-2\pi in} e^{-2\pi inx} dx \\ &= \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) \frac{1}{-2\pi in} e^{-2\pi inx} + \frac{1}{2\pi in} \int_0^1 e^{-2\pi inx} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2\pi in} e^{-2\pi in} - (-\frac{1}{2}) \frac{1}{-2\pi in} e^{-2\pi i \cdot 0} \\ &= -\frac{1}{4\pi in} (1 + 1) = -\frac{1}{2\pi in}, \end{aligned}$$

kun taas arvolla $n = 0$ saadaan

$$F_0 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) dx = \int_0^1 (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x) dx = 0.$$

Tällöin siis funktiolla σ_0 on Fourier-sarja

$$\sigma_0(x) = - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi in} e^{2\pi inx}, \quad (5.4)$$

joka todella suppenee funktion σ_0 arvoja kohti niissä pisteissä, joissa σ_0 on jatkuva. Sen sijaan funktion σ_0 epäjatkuvuuspisteissä (kokonaislukupisteet) sarja suppenee kohti vasemman- ja oikeanpuoleisen raja-arvon keskiarvoa 0 kohti. Näin ollen yhtäsuuruus (5.4) ei todellisuudessa päde kaikkialla, vaan rikkoutuu epäjatkuvuuspisteissä.

5.2 Fourier-sarjojen reaalinen muoto

Kuten aiemmin mainittiin, on Fourier-sarjoilla myös reaalinen muoto, jossa trigonometriset funktiot korvaavat eksponenttifunktion. Näiden muotojen välittävänä tekijänä toimii Eulerin kaava.

Reaalinen muoto saadaan yhdistämällä kompleksisessa muodossa termit, jotka vastaavat kertoimia F_{-n} ja F_n :

$$\begin{aligned} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} + F_{-n} e^{\frac{2\pi i (-n)}{T} x} &= F_n \left(\cos \frac{2\pi n}{T} x + i \sin \frac{2\pi n}{T} x \right) + F_{-n} \left(\cos \frac{2\pi (-n)}{T} x + i \sin \frac{2\pi (-n)}{T} x \right) \\ &= (F_n + F_{-n}) \cos \frac{2\pi n}{T} x + i(F_n - F_{-n}) \sin \frac{2\pi n}{T} x = A_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + B_n \sin \frac{2\pi n}{T} x, \end{aligned}$$

missä on merkitty $A_n = F_n + F_{-n}$ ja $B_n = i(F_n - F_{-n})$. Lisäksi on erikseen huomioitava termi, jossa $n = 0$. Tällöin $A_0 = F_0 + F_{-0} = 2F_0$ ja $B_0 = i(F_0 - F_{-0}) = 0$ ja sarjan reaalinen muoto saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-M}^M F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} &= F_0 + \sum_{n=1}^M e^{\frac{2\pi i n}{T} x} + \sum_{n=-M}^{-1} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} = F_0 + \sum_{n=1}^M F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} + \sum_{n=1}^M F_{-n} e^{\frac{2\pi i (-n)}{T} x} \\ &= F_0 + \sum_{n=1}^M \left(F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} + F_{-n} e^{\frac{2\pi i (-n)}{T} x} \right) \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^M \left(A_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + B_n \sin \frac{2\pi n}{T} x \right). \end{aligned}$$

Kun annetaan luvun M lähestyä ääretöntä, nähdään, että

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + B_n \sin \frac{2\pi n}{T} x \right). \quad (5.5)$$

Yhtälön (5.5) oikean puolen sarjaa kutsutaan vasemman puolen reaalisiksi muodoksi. Fourier-sarjoja kutsutaan myös trigonometrisiksi sarjoiksi, ja reaalinen muoto perustelee tämän nimityksen. Koska kertoimille F_n on olemassa esitys (5.3), saadaan yhteyden $A_n = F_n + F_{-n}$ ja $B_n = i(F_n - F_{-n})$ perusteella myös reaalisien muodon kertoimille muotoa (5.3) vastaava integraaliesitys, mutta laskutoimitusten kannalta on usein suoraviivaisempaa selvittää kompleksisen muodon kertoimet F_n ja tästä reaalisien muodon kertoimet A_n ja B_n yllä kuvatulla tavalla.

Nimitys ”reaalinen muoto” tulee kokonaan perustelluksi kuitenkin vasta jos voidaan näyttää toteen, että kertoimet A_n ja B_n ovat reaalisia. Näin todellakin on, jos f on reaaliarvoinen funktio. Tällöin nimittäin

$$\overline{F_n} = \overline{\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-\frac{2\pi i n}{T} x} dx} = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} \overline{f(x) e^{-\frac{2\pi i n}{T} x}} dx = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{\frac{2\pi i n}{T} x} dx = F_{-n}$$

ja siksi $A_n = F_n + F_{-n} = F_n + \overline{F_n} = 2 \operatorname{Re} F_n \in \mathbb{R}$ ja $B_n = i(F_n - F_{-n}) = i(F_n - \overline{F_n}) = -2 \operatorname{Im} F_n \in \mathbb{R}$.

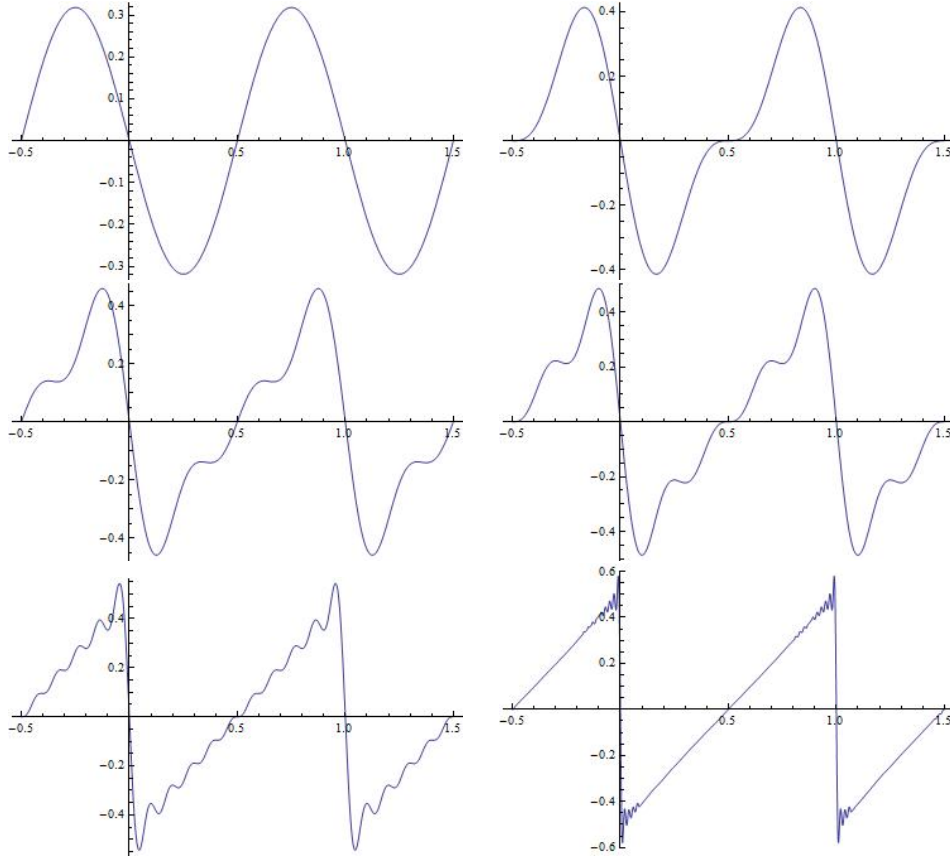
Esimerkki 39 Esimerkin 38 Fourier-sarjalle saadaan reaalinen muoto seuraavasti: Lasketaan $A_n = -\frac{1}{2\pi i n} + (-\frac{1}{2\pi i (-n)}) = 0$ ja $B_n = i(-\frac{1}{2\pi i n} - (-\frac{1}{2\pi i (-n)})) = -\frac{1}{\pi n}$, mistä nähdään, että

$$\sigma_0(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x). \quad (5.6)$$

Ylläolevassa sarjaesityksessä, kuten jo aiemminkin esitettyssä σ_0 :n Fourier-sarjassa on se ominaisuus, että σ_0 ei ole jatkuva funktio, vaikka sarjan kaikki osafunktiot ovatkin jatkuvia. Tämä merkitsee sitä, että ylläoleva Fourier-sarja ei suppenne tasaisesti.

Epätasaisesta suppenemisesta seuraa, että lähestyttäessä epäjatkuvuuspistettä joudutaan ottamaan mukaan aina vain enemmän sarjan termejä, jos halutaan pitää yllä samaa laskentatarkkuutta.

Seuraavaan kuvaan on piirretty funktion $\sigma_0(x)$ reaalisen Fourier-sarjan alkuosia, joihin on otettu mukaan 1, 2, 3, 4, 10 ja 50 ensimmäistä termiä.



Esimerkki 40 Määritetään funktiolle $f(x) = x^2$ Fourier-sarja $f_1(x)$ välillä $[-\pi, \pi]$ ja $f_2(x)$ välillä $[0, 2\pi]$. Kummassakin tapauksessa jakson pituus on 2π ja osittaisintegroinnilla saadaan

$$\int x^2 e^{-inx} dx = \frac{e^{-inx}}{n^3} (in^2 x^2 + 2nx - 2i) + C$$

kun $n \neq 0$. Näin ollen välillä $[-\pi, \pi]$ on

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left/ \frac{1}{3} x^3 \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

ja

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{n^3} (in^2 x^2 + 2nx - 2i) = \frac{(-1)^n}{n^3} 2n = \frac{2(-1)^n}{n^2}.$$

Sijoitusta tehdessä piti huomioida että $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$, sillä $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$f_1(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{inx} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Reaalista muotoa etsittäessä pitää huomata, että $(-1)^{-n} = ((-1)^{-1})^n = (-1)^n$.

Välillä $[0, 2\pi]$ taas

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{3}$$

ja

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-inx}}{n^3} (in^2 x^2 + 2nx - 2i) dx = \frac{2\pi ni + 2}{n^2} = \frac{2\pi}{n} i + \frac{2}{n^2}.$$

Sijoitusta tehdessä pitää huomata, että $e^{-in2\pi} = e^{in2\pi} = 1$, koska $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$f_2(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{2(\pi ni + 1)}{n^2} e^{inx} = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos(nx) - \frac{4\pi}{n} \sin(nx) \right).$$

5.3 Fourier-sarjojen ominaisuuksia

Aiemmin on käsitelty funktiosarjoja kahdesta eri lähtökohdasta: Ensimmäinen lähtien funktiosta, jolle pyritään etsimään esitys sarjan avulla, ja toisaalta lähtien sarjasta, jonka toivotaan esittävän jotain funktiota. Fourier-sarjojen yhteydessä ensimmäisellä lähestymistavalla voidaan taata enemmän differentiaali- ja integraalilaskennan kannalta toivottuja ominaisuuksia.

Fourier-sarjoille voidaan todistaa seuraavat tulokset:

Lause 27 Olkoon f T -jaksoinen funktio, joka toteuttaa lauseen 26 ehdot.

- Tällöin Fourier-sarja (5.1) voidaan integroida termeittäin, siis

$$\int_0^x f(t) dt = F_0 x + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} F_n \frac{T}{2\pi i n} (e^{\frac{2\pi i n}{T} x} - 1).$$

- Jos funktion f'' toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa jokaisessa tarkasteluvälin pisteessä, voidaan Fourier-sarja (5.1) derivoida termeittäin, siis

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi i n}{T} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}.$$

Mikäli $f'(x)$ on epäjatkua, suppenee derivoimalla saatu sarja pisteessä x_0 kohti toispuoleisten raja-arvojen keskiarvoa $\frac{1}{2}(f'(x_{0+}) + f'(x_{0-}))$. Termeittäin derivoituvuus ja integroituvuus pätevät myös reaaliselle muodolle.

Yllä oleva lauseen todistus vaatii sen verran esitietoja, että sitä ei voida esittää Insinöörimatematiikan kurssikokonaisuudessa. Sen sijaan lausetta voidaan käyttää uusien fourier-sarjojen johtamiseksi entisistä.

Esimerkki 41 Kurssilla Insinöörimatematiikka B merkittiin $\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t) dt$. Tällöin funktiolle $\sigma_1(x)$ saadaan Fourier-sarjan reaalinen muoto seuraavasti: Koska (epäjatkuvuuspisteitä lukuunottamatta)

$$\sigma_0(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x),$$

on

$$\begin{aligned}
\sigma_1(x) &= \int_0^x \sigma_0(t) dt = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \int_0^x \sin(2\pi n t) dt = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \left[-\frac{1}{2\pi n} \cos(2\pi n t) \right]_0^x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} (\cos(2\pi n x) - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} \cos(2\pi n x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} \cos(2\pi n x) + C,
\end{aligned}$$

missä on merkitty

$$C = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2}$$

Aiemman perusteella tiedetään, että tämä sarja suppenee, joten vakio C on hyvin määritelty ja koska välillä $[0, 1)$ on $\sigma_0(x) = x - \frac{1}{2}$, on

$$\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t) dt = \int_0^x \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t \right]_0^x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x,$$

kun $x \in [0, 1)$. Tällä välillä siis pätee

$$\sigma_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} \cos(2\pi n x). \quad (5.7)$$

Koska σ_1 on jatkuva funktio, jonka derivaatat ovat toispuoleisina olemassa kaikkialla, esittää näin saatu sarja funktiota σ_1 kaikkialla. Huomionarvoisena voidaan pitää myös sitä, että Fourier-sarjan (5.7) esittämän funktion jatkuvuus voidaan todeta yleisen sarjaterorian perusteella:

$$\left| \frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi^2 n^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi^2 n^2},$$

joten sarja suppenee tasaisesti ja siksi yhtälön (5.7) oikea puoli määrittelee jatkuvan funktion (osafunktiot ovat jatkuvia).

Myös vakio C voidaan määrittää, kyseessä on funktion $\sigma_1(x)$ Fourier-sarjan vakiotermin F_0 . Tämä saadaan tavalliseen tapaan integroimalla:

$$C = F_0 = \int_0^1 \sigma_0(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right) dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}.$$

Tällöin saadaan siis selville, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 n^2} = \frac{1}{12},$$

joka voidaan kirjoittaa edelleen muotoon

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Funktion ja sen Fourier-kertoimien välillä on seuraavan lauseen esittämä yhteys, jota kutsutaan *Parsevalin kaavaksi*.

Lause 28 (Parsevalin kaava) Olkoot f ja g välillä $[\alpha, \alpha + T]$ määriteltyjä funktioita, joilla on suppenevat Fourier-sarjat

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$$

ja

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}.$$

Tällöin

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \overline{G_n}$$

Todistus Muodollisesti lausekkeita käsittelemällä saadaan yhtälöketju

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \overline{g(x)} dx &= \int_{\alpha}^{\alpha+T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} \overline{\sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m e^{\frac{2\pi i m}{T} x}} dx = \int_{\alpha}^{\alpha+T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{G_m} e^{-\frac{2\pi i m}{T} x} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha+T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_n \overline{G_m} e^{\frac{2\pi i (n-m)}{T} x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_n \overline{G_m} \int_{\alpha}^{\alpha+T} e^{\frac{2\pi i (n-m)}{T} x} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \overline{G_n} \cdot T, \end{aligned}$$

mistä väite seuraa. Yhtälöketjussa on kuitenkin monia tarkempia perusteluja vaativia seikkoja, jotka sivuutetaan. \square

Valitsemalla Parsevalin kaavassa $f = g$ saadaan ns. *Plancherelin kaava*

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2,$$

mikä voidaan sanallisesti ilmaista seuraavalla tavalla: Funktion $|f(x)|^2$ keskiarvo välillä $[\alpha, \alpha+T]$ on sama kuin funktion f Fourier-kertoimien itseisarvojen neliöiden summa. Fourier-sarjojen reaalille muodolle Plancherelin kaavaa pitää jonkin verran muuntaa. On nimittäin helppo todeta, että jos $A_n = F_n + F_{-n}$ ja $B_n = i(F_n - F_{-n})$, niin

$$|F_n|^2 + |F_{-n}|^2 = \frac{1}{2}(|A_n|^2 + |B_n|^2).$$

Lopullinen esitysasu reaalisen muodon Plancherelin kaavalle jätetään harjoitustehtäväksi.

Luku 6

Fourier-muunnokset

Fourier-sarjoja käsittelevässä luvussa tarkasteltiin T -jaksoisten funktioiden esityksiä

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$$

joiden kertoimien jonoa $(\dots, F_{-3}, F_{-2}, F_{-1}, F_0, F_1, F_2, F_3, \dots)$ kutsuttiin spektriiksi. Sanottiin, että funktiossa f esiintyy taajuus $\frac{n}{T}$ jos $F_n \neq 0$ tai $F_{-n} \neq 0$. Esitystä Fourier'n sarjana voidaan ajatella yleistettävän siten, että taajuuksien $\frac{n}{T}$, missä $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ sijaan sallittaisiin kaikki mahdolliset taajuudet, jolloin päädytään Fourier'n sarjojen sijasta Fourier'n integraaleihin.

6.1 Fourier-integraali ja -muunnos

Trigonometrinen tai eksponenttifunktioiden kombinaatit

$$f(x) = F_1 e^{2\pi i f_1 x} + F_2 e^{2\pi i f_2 x} + \dots + F_n e^{2\pi i f_n x} = \sum_{k=1}^n F_k e^{2\pi i f_k x} \quad (6.1)$$

ovat käyttökelpoisia joissakin tapauksissa, mutta summien (6.1) avulla ei voida esittää kaikkia sovelluksissa tarvittavia funktioita. Tilanne ei muutu oleellisesti, vaikka äärellisten summien sijasta siirryttäisiin sarjoihin.

Jos sen sijaan summien (6.1) sijasta siirrytään integraaleihin, saadaan esitettyä varsin suuri joukko funktioita $f(x)$. Periaatteen tasolla summista tai sarjoista integraaleihin siirtyminen merkitsee *pistespektin* $(\dots, F_{-3}, F_{-2}, F_{-1}, F_0, F_1, F_2, F_3, \dots)$ laajentamista jatkuvaksi spektriiksi:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i x y} dy. \quad (6.2)$$

Määritelmä 15 Funktion f integraaliesitystä (6.2) kutsutaan Fourier-integraaliksi tai Fourier'n integraaliksi ja funktiota F f :n *spektriiksi*.

Huomautus 21 Fourier-analyysissa, toisin kuin yleisessä epäoleellisten integraalien teoriassa, kahteen suuntaan äärettömän integraalin ajatellaan aina merkitsevän Cauchyn pääarvoa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(x) dx.$$

Klassisen Fourier-analyysin perustehtävänä on selvittää, millaisille funktioille f esitys (6.2) on olemassa ja miten spektri F löydetään. Alan perustulos on seuraavassa lauseessa, jonka todistusta ei esitetä tässä yhteydessä, vaan se perustellaan vasta luvun lopussa.

Lause 29 Oletetaan, että f :llä on korkeintaan äärellinen määrä epäjatkuvuuspisteitä äärellisillä väleillä ja että integraali $\int_{-\infty}^{\infty} |f|$ on äärellisenä olemassa. Tällöin f :llä on epäjatkuvuuspisteitä lukuunottamatta esitys Fourier'n integraalina

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi ixy} dy \quad (6.3)$$

ja tällöin

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx. \quad (6.4)$$

Huomautus 22 Jos $\int_{-\infty}^{\infty} |f|$ suppenee, niin tietenkin myös $\int_0^{\infty} |f|$ suppenee (miksi?). Integraalin $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$ suppenemisen perusteella voidaan arvioida myös nopeutta, jolla $|f(x)|$ lähestyy nollaa: Oletetaan, että f on niin säännöllinen, että raja-arvo $\lim_{x \rightarrow \infty} x |f(x)|$ on olemassa. Jos tämä raja-arvo ei ole nolla, olemassa sellainen vakio $c > 0$, että $x |f(x)| > c$ kun x on kyllin suuri. Täten $|f(x)| \geq c \frac{1}{x}$ suurilla x :n arvoilla, joten minoranttiperiaatteen mukaan $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$ ei suppene. Tämän ristiriidan perusteella $x |f(x)| \rightarrow 0$, kun $x \rightarrow \infty$, mikäli raja-arvo on olemassa. Samoin voidaan todeta, että $x |f(x)| \rightarrow 0$, kun $x \rightarrow -\infty$, mikäli raja-arvo on olemassa.

Yhtälö (6.3) voidaan tulkita funktion $f(x)$ esitykseksi y -taajuisten eksponenttifunktioiden $x \mapsto e^{2\pi ixy}$ avulla. Yhtälö (6.4) puolestaan ilmaisee, että spektrin $F(y)$ yhteys funktion $f(x)$ on varsin symmetrinen: Funktion $F(-y)$ esityksessä Fourier'n integraalina kerroinfunktiona toimii $f(x)$.

Määritelmä 16 Funktion f Fourier-muunnos on funktio

$$\mathcal{F}[f](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx$$

Edellä esitetyn perusteella funktio $\mathcal{F}[f]$ on tällöin kerroinfunktiona f :n esityksessä Fourier'n integraalina:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](y)e^{2\pi ixy} dy.$$

Määritelmä 17 Funktion f käänteinen Fourier-muunnos on funktio

$$\mathcal{F}^{-1}[f](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi iyx} dx$$

Määritelmien perusteella $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f] = f$ lukuunottamatta mahdollisesti funktion f epäjatkuvuuspisteitä. Vaihtoehtoinen merkintä Fourier-muunnokselle on $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$. Myös merkintätapa, jossa funktion f Fourier-muunnosta merkitään isolla kirjaimella F , on toisinaan hyvin käytökelpoinen.

Huomautus 23 Kirjallisuudessa esiintyy myös muunlaisia määritelmiä Fourier-muunnokselle ja käänteiselle Fourier-muunnokselle. Useimmiten nämä eroavat tämän kurssin määritelmästä eksponentissa esiintyvän kertoimen 2π osalta (joissain määritelmissä käytetään muuttujana kulmataajuutta $\omega = 2\pi f$ taajuuden f sijaan).

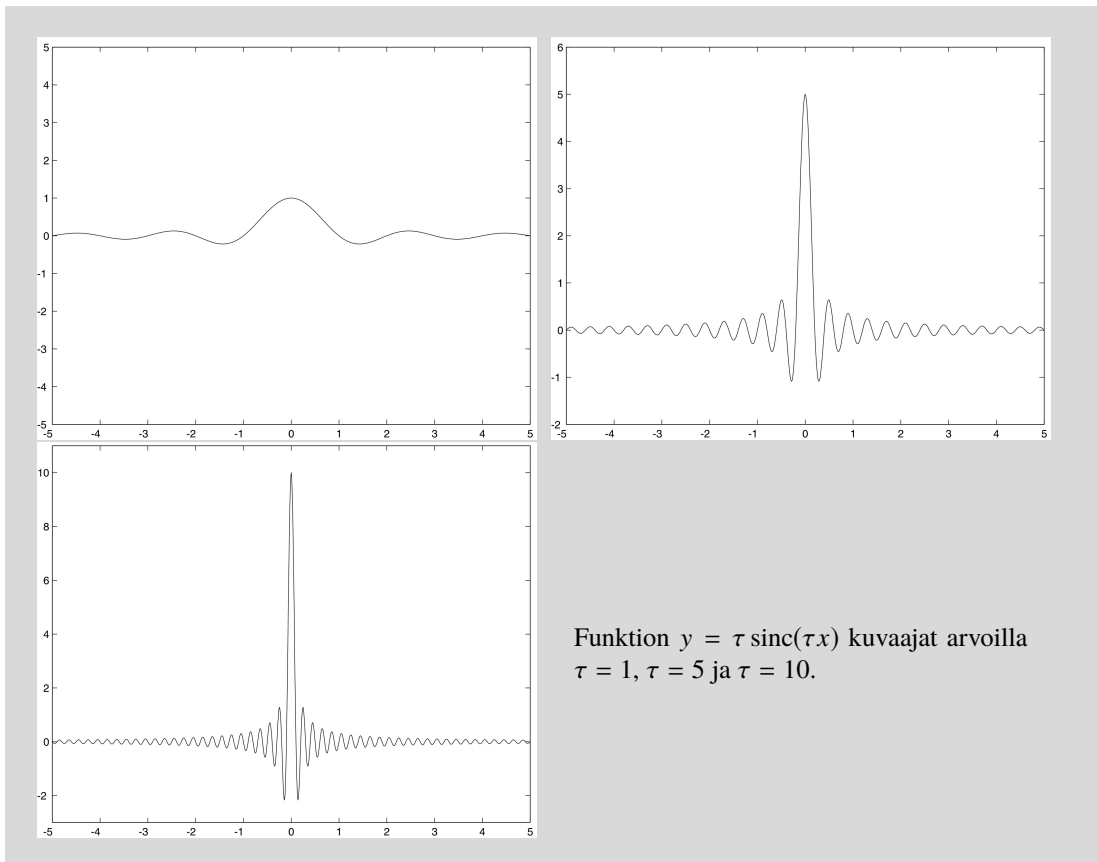
Määritelmä 18 Olkoon $F = \mathcal{F}[f]$ funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ spektri. Kun F esitetään napakoordinaattimuodossa $F(x) = |F(x)| e^{i\theta(x)}$, sanotaan, että $|F(x)|$ on f :n *amplitudispektri* ja $\theta(x)$ on f :n *vaihespektri*.

Jatkoa varten otetaan käyttöön ns. normalisoitu sinc-funktio.

Määritelmä 19

$$\text{sinc } x = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Kirjallisuudessa esiintyy toisinaan myös normalisoimaton sinc-funktio, joka määritellään lausekkeella $\frac{\sin x}{x}$. Koska $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on sinc-funktio (normalisoimaton ja normalisoitu) jatkuva koko reaaliakselilla. Jatkossa tarkasteltavaksi tulee muotoa $\tau \text{sinc}(\tau x)$ oleva funktio, jonka kuvaajia on eri τ :n arvoilla piirrettyä seuraavaan kuvaan. Koska $|\tau \text{sinc } \tau x| = \left| \frac{\tau \sin \pi \tau x}{\pi \tau x} \right| \leq \frac{1}{|\pi x|}$, ovat tämän funktion arvot kaukana origosta lähellä nolaa, ja mitä suurempi τ on, sitä kapeamman ja korkeamman ”piikin” funktion $\tau \text{sinc}(\tau x)$ kuvaaja muodostaa origossa. On syytä huomata myös, että sinc on parillinen funktio: $\text{sinc}(-x) = \text{sinc}(x)$.



Määritelmä 20 Määritellään suorakulmainen pulssi Π seuraavasti:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } |x| < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{kun } |x| = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Esimerkki 42 Pulssifunktion Π Fourier-muunnos on

$$\mathcal{F}[\Pi](y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x)e^{-2\pi ixy} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Pi(x)e^{-2\pi ixy} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi ixy} dx.$$

Jos $y \neq 0$, on siis

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Pi](y) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{-2\pi iy} e^{-2\pi ixy} = \frac{1}{-2\pi iy} (e^{-\pi iy} - e^{\pi iy}) \\ &= \frac{1}{\pi y} \sin(\pi y) = \text{sinc } y. \end{aligned}$$

Jos $y = 0$, saadaan

$$\mathcal{F}[\Pi](y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx = 1 = \text{sinc } 0.$$

Tällöin siis kaikilla y :n arvoilla

$$\mathcal{F}[\Pi](y) = \text{sinc } y.$$

Tämä merkitsee sitä, että funktio Π voidaan esittää Fourier'n integraalina

$$\Pi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc } y \cdot e^{2\pi ixy} dy,$$

jossa funktion Π spektri $\text{sinc } y$ saa suurimman arvonsa origossa ja lähenee nollaa kun loittonee origosta.

Esimerkki 43 Määritellään ns. *signum*-funktio seuraavasti:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{jos } x < 0, \\ 0, & \text{jos } x = 0, \\ 1, & \text{jos } x > 0. \end{cases}$$

ja lasketaan funktion $f(x) = \text{sgn}(x)e^{-\alpha|x|}$, missä $\alpha > 0$ Fourier-muunnos.

$$\begin{aligned} & \int_{-M}^M \text{sgn}(x)e^{-\alpha|x|}e^{-2\pi ixy} dx = \int_{-M}^0 -e^{\alpha x - 2\pi ixy} dx + \int_0^M e^{-\alpha x - 2\pi ixy} dx \\ &= \int_{-M}^0 -\frac{1}{\alpha - 2\pi iy} e^{x(\alpha - 2\pi iy)} - \int_0^M \frac{1}{\alpha + 2\pi iy} e^{-x(\alpha + 2\pi iy)} \\ &= -\frac{1}{\alpha - 2\pi iy} (1 - e^{-M(\alpha - 2\pi iy)}) - \frac{1}{\alpha + 2\pi iy} (e^{-M(\alpha + 2\pi iy)} - 1) \\ &\xrightarrow{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{\alpha - 2\pi iy} + \frac{1}{\alpha + 2\pi iy} = \frac{\alpha - 2\pi iy - (\alpha + 2\pi iy)}{\alpha^2 + (2\pi y)^2} = -\frac{4\pi iy}{\alpha^2 + (2\pi y)^2}, \end{aligned}$$

siis

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(x)e^{-\alpha|x|}](y) = -\frac{4\pi iy}{\alpha^2 + (2\pi y)^2}.$$

Tapauksessa $\alpha = 0$ ei integraali suppene, mutta sen sijaan saatu lauseke on mielekäs (kun $y \neq 0$). Siksi funktion sgn Fourier-muunnoksena usein pidetään funktiota

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(x)](y) = -\frac{4\pi iy}{4\pi^2 y^2} = -\frac{i}{\pi y} = \frac{1}{i\pi y},$$

vaikka signum-funktio ei toteutakaan ehtoa $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{sgn}(x) = 0$. Itse asiassa Fourier'n integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\pi y} e^{2\pi ixy} dy,$$

jonka siis pitäisi esittää signum-funktiota ei sellaisenaan suppene pisteessä $y = 0$ olevan epäoleellisuuskohdan vuoksi. Cauchyn pääarvoksi tulkitsemalla, hajottamalla integraali positiiviseen ja negatiiviseen osaan ja yhdistämällä nämä saadaan kuitenkin suppeneva integraali, joka todella esittää signum-funktiota (harjoitustehtävä).

6.2 Fourier-muunnoksen tulkintaa

6.2.1 Fourier'n integraalin esitysmuotoja

Olkoon F funktion f spektri, jolloin siis

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi ixy} dy. \quad (6.5)$$

Tämä merkitsee sitä, että f on esitetty y -taajuisten eksponenttifunktioiden $e_{\pm y}(x) = e^{\pm 2\pi ixy}$, $y \in [0, \infty)$ avulla integraalina (joka voidaan tulkita raja-arvoksi summista). On oleellista huomata, että esityksessä (6.5) funktion F argumenttina ei ole x , vaan integrointimuuttuja y . Funktiolla F on esityksessä (6.5) siis kerroinfunktion asema: $F(y)$ määrittää, millä vahvuudella (amplitudilla) y -taajuinen eksponenttifunktio $x \mapsto e^{2\pi ixy}$ on mukana f :n esityksessä, aivan samoin kuin esityksessä (6.1) kerroin F_k määrää, millä amplitudilla f_k -taajuinen eksponenttifunktio $e^{2\pi if_k x}$ on läsnä.

Erityisesti reaaliarvoisille funktioille f saattaa toisinaan olla havainnollisempaa käyttää eksponenttifunktion esitystä sini- ja kosinifunktioiden avulla: Merkitään $A(x) = F(x) + F(-x)$ ja $B(x) = i(F(x) - F(-x))$, jolloin $F(x) = \frac{1}{2}(A(x) - iB(x))$ ja $F(-x) = \frac{1}{2}(A(x) + iB(x))$ ja funktion f esittää integraalia voidaan käsitellä seuraavasti:

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M F(y) e^{2\pi ixy} dy &= \int_0^M F(y) e^{2\pi ixy} dy + \int_{-M}^0 F(y) e^{2\pi ixy} dy \\ &= \int_0^M F(y) e^{2\pi ixy} dy + \int_0^M F(-y) e^{-2\pi ixy} dy \\ &= \int_0^M (F(y) e^{2\pi ixy} + F(-y) e^{-2\pi ixy}) dy \\ &= \int_0^M (F(y)(\cos(2\pi xy) + i \sin(2\pi xy)) + F(-y)(\cos(2\pi xy) - i \sin(2\pi xy))) dy \\ &= \int_0^M ((F(y) + F(-y)) \cos(2\pi xy) + i(F(y) - F(-y)) \sin(2\pi xy)) dy \\ &= \int_0^M A(y) \cos(2\pi xy) + B(y) \sin(2\pi xy) dy. \end{aligned}$$

Kun annetaan M :n lähestyvä ääretöntä, saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi ixy} dy = \int_0^{\infty} (A(y)\cos(2\pi xy) + B(y)\sin(2\pi xy)) dy$$

Tällöin f on siis esitetty f -taajuisten kosini- ja sinifunktioiden $x \rightarrow \cos(2\pi xy)$ ja $x \rightarrow \sin(2\pi xy)$ avulla; esityksessä y käy läpi kaikki reaaliarvot. Näin saatua esitystä voidaan kyllä käyttää muillekin kuin reaaliarvoisille funktioille, mutta tällöin kerroinfunktiot $A(x)$ ja $B(x)$ eivät välttämättä ole reaalisia. Reaaliarvoiselle funktiolle f kuitenkin pätee

$$\overline{F(y)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}e^{2\pi ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi ixy} dx = F(-y), \quad (6.6)$$

joten $A(x) = F(x) + F(-x) = F(x) + \overline{F(x)} = 2 \operatorname{Re}(F(x))$ ja $B(x) = i(F(x) - F(-x)) = i(F(x) - \overline{F(x)}) = -2 \operatorname{Im}(F(x))$ ovat reaaliarvoisia funktioita.

Reaaliarvoisille funktioille saadaan vielä yksi vaihtoehtoinen esitys saadaan hajottamalla F amplitudi- ja vaihespektri: $F(y) = |F(y)| e^{i\theta(y)}$, jolloin

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} (F(y)e^{2\pi ixy} + F(-y)e^{-2\pi ixy}) dy = \int_0^{\infty} 2 \operatorname{Re}(F(y)e^{2\pi ixy}) dy \\ &= 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re}(|F(y)| e^{i\theta(y)} e^{2\pi ixy}) dy = 2 \int_0^{\infty} |F(y)| \cos(2\pi xy + \theta(y)) dy. \end{aligned}$$

Lisäksi voidaan huomata, että yhtälöstä (6.6) seuraa

$$F(-y) = \overline{F(y)} = \overline{|F(y)| e^{i\theta(y)}} = |F(y)| e^{-i\theta(y)}$$

ja

$$F(-y) = |F(-y)| e^{i\theta(-y)} = \overline{|F(y)| e^{i\theta(y)}} = |F(y)| e^{i\theta(-y)},$$

joten reaaliarvoisille funktioille f pätee sekä

$$\overline{F(y)} = F(-y) \quad \text{että} \quad \theta(-y) = -\theta(y),$$

missä $\theta(y)$ on f :n vaihespektri.

6.2.2 Äänisignaalin esittäminen

Tyypillinen Fourier-muunnosten sovellus on äänen käsittely. Ääni fyysikaalisena ilmiönä merkitsee ilmanpaineen vaihtelua, ja näin ollen yhden äänilähteen tuottamaa ääntä voidaan yksinkertaistetusti kuvata ilmanpaineen poikkeamana $h(t)$ ajan t kuluessa. Äänirauta on esimerkki harmonisesta värähtelijästä, joka tuottaa siniaallon: $h(t) = A \sin(\omega t + \theta)$, missä A , ω ja θ riippuvat ääniraudan ominaisuuksista, ajanhetken $t = 0$ valinnasta ja suurejärjestelmästä. Yleensä on tapana merkitä $\omega = 2\pi f$, jolloin $h(t) = A \sin(2\pi ft + \theta)$. Lukua f kutsutaan värähtelyn *taajuudeksi*, A :ta sen *amplitudiksi* ja θ :aa *vaiheeksi*.

Ääniraudan tuottama siniaalto mielletään puhtaana äänenä ja itse asiassa kaikki äänet saadaankin yhdistelemällä eritaajuisia, -vaiheisia ja -vahvuisia siniaaltoja, kuten piakkoin nähdään. Tosin yhtä hyvin voitaisiin puhua kosiniaalloista, sillä $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$. Jos $h(t)$ on mikä hyvänsä äänisignaali ja $H(f) = |H(f)| e^{i\theta(f)}$ sen Fourier-muunnos, on

$$h(t) = 2 \int_0^{\infty} |H(f)| \cos(2\pi ft + \theta(f)) df. \quad (6.7)$$

Tämä merkitsee sitä, että äänisignaali $h(t)$ on koostettu puhtaista kosiniäänistä

$$2 |H(f)| \cos(2\pi ft + \theta(f)),$$

missä f kulkee läpi kaikki taajuudet $f \in [0, \infty)$. Esitys (6.7) on hyvin sopusoinnussa puhtaan siniäänien esityksen kanssa, mutta esitys

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{2\pi ift} df \quad (6.8)$$

on usein matemaattisesti suoraviivaisempi, vaikka tässä funktion $h(t)$ yhteys yksinkertaisiin värähtelyliikkeisiin $e^{2\pi ift}$ on intuitiivisesti heikompi, sillä sekä spektri $H(f)$ että eksponenttifunktiot $e_{\pm t}(t) = e^{\pm 2\pi ift}$ ovat kompleksiarvoisia. Esityksen (6.8) intuitiivisessa käsittelyssä tulisikin muistaa, että reaalisen äänisignaalin esittäminen tapahtuu käyttämällä vain arvoja $f \geq 0$, mutta kompleksisessä esityksessä kuhunkin f :n arvoon liittyy sen vastaluku $-f$, jotka parina edustavat samaa taajuutta f . Matemaattisesti tämä ilmenee siten, että eksponenttifunktiot $e_{\pm f}$ kumpainenkin sisältävät f -taajuisen sini- ja kosinifunktion, missä $f \geq 0$. On myös huomattava, että $H(-f) = \overline{H(f)}$ ja $e^{-2\pi ift} = \overline{e^{2\pi ift}}$.

Fourier-muunnoksia voidaan käyttää taajuuskorjainten ja -suodattimien analysointiin ja suunnitteluun. Jos esimerkiksi signaalista $h(t)$ tahdotaan poistaa taajuuden f_0 ylittävät komponentit, tämä tapahtuu siten, että etsitään signaalin $h(t)$ Fourier-muunnos $H(f)$ esitystä

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{2\pi ift} df$$

varten. Taajuutta f_0 suuremmat taajuudet poistetaan asettamalla $H(f) = 0$, jos $f > f_0$ tai $f < -f_0$ ja näin saadaan uusi signaali

$$h_1(t) = \int_{-f_0}^{f_0} H(f) e^{2\pi ift} df,$$

josta epätoivotut taajuudet on poistettu.

Määritelmä 21 Sanotaan, että funktio f sisältää taajuuden y , mikäli $\mathcal{F}[f](y) \neq 0$ tai $\mathcal{F}[f](-y) \neq 0$. Jos $\mathcal{F}[f](y) = 0$, kun $|y| > B$, sanotaan, että f ei sisällä B :tä korkeampia taajuuksia. Jos on olemassa B , jota korkeampia taajuuksia f ei sisällä, sanotaan, että funktiolla f on rajoitettu (taajuus)kaistanleveys.

Fourier-muunnosten tarjoamalla työkaluilla voidaan toisaalta analysoida mekanismeja, jotka muokkaavat signaalia ja toisaalta taas suunnitella niitä. Esimerkiksi vastuksista, keloista ja kondensaattoreista rakennetun RCL-piirin vaikutusta sähköisesti esitettyyn signaaliin voidaan arvioida Fourier-analyysin keinoin.

Äänisignaalin yhteydessä funktio $h(t)$ esittää ilmanpaineen poikkeamaa ajan kuluessa, kun taas esimerkiksi sähköisen signaalin yhteydessä h voi esittää jännitteen arvoa ajan funktiona.

Määritelmä 22 Termi *aikataso* viittaa signaaliin $h(t)$ tai sen graafiseen esitykseen. Termi *taajuus-taso* merkitsee signaalin $h(t)$ spektriä $H(f)$ tai sen graafista esitystä, mikäli $H(f)$ on reaaliarvoinen.

6.3 Fourier-muunnosten ominaisuuksia

Useat Fourier-muunnosten perusominaisuuksista voidaan johtaa suoraan integraalien ominaisuuksien perusteella.

6.3.1 Perusominaisuuksia

Koska Fourier-muunnos ja sen käänteismuunnos määritellään samankaltaisella kaavalla, ovat tässä esitellyn kaltaiset ominaisuudet voimassa myös käänteisille Fourier-muunnoksille.

Lause 30 (Linearisuus)

Olkoot $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ sekä f_1 ja f_2 funktioita, joilla on Fourier-muunnos. Tällöin

$$\mathcal{F}[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 \mathcal{F}[f_1] + \alpha_2 \mathcal{F}[f_2].$$

Todistus Seuraa suoraan integraalien lineaarisuudesta. □

Seuraavissa lauseissa merkitään $F(y) = \mathcal{F}[f(x)](y)$.

Lause 31 (Duaalisuusperiaate) $\mathcal{F}[F](x) = f(-x)$ lukuunottamatta mahdollisesti epäjatkuvuus-pisteitä.

Todistus

$$f(-x) = \mathcal{F}^{-1}[F](-x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i(-x)y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-2\pi ixy} dy = \mathcal{F}[F](x)$$

Lause 32 (Kompleksinen modulaatio eli taajuussiirto)

$$\mathcal{F}[f(x)e^{2\pi iy_0 x}](y) = F(y - y_0).$$

Todistus

$$\mathcal{F}[f(x)e^{2\pi iy_0 x}](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi iy_0 x} e^{-2\pi iyx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i(y-y_0)x} dx = F(y - y_0).$$

Lause 33 (Aikasiirto)

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)](y) = F(y)e^{-2\pi ix_0 y}.$$

Todistus Seuraa suoraan duaalisuusperiaatteesta.

Lause 34 (Skaalaus)

Kun $\alpha > 0$, on

$$\mathcal{F}[f(\alpha x)](y) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

Todistus Integraaliin sijoittaminen $x = \frac{s}{\alpha}$ antaa

$$\mathcal{F}[f(\alpha x)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x)e^{-2\pi ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-2\pi iy\frac{s}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} ds = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{y}{\alpha}\right).$$

Lause 35 (Derivointi)

$$\mathcal{F}[f'(x)](y) = 2\pi iyF(y).$$

Todistus Osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(x)](y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-2\pi ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}(-2\pi iy) dx \\ &= 2\pi iy \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx = 2\pi iyF(y).\end{aligned}$$

Sijoituksessa käytettiin tarkasteltavien funktioiden ominaisuutta $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. \square

Induktiolla saadaan myös

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](y) = (2\pi iy)^n F(y).$$

Lause 36 (Parsevalin kaava)

Olkoon $G(y) = \mathcal{F}[g(x)](y)$. *Tällöin*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\overline{G(y)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Todistus Sivuutetaan toistaiseksi. \square

Yllä olevaa kaavaa kutsutaan erityisesti fysiikkaan liittyvien sovellusten yhteydessä myös *teho-teoreemaksi*. Tapauksessa $g = f$ kaava saa muodon

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx,$$

joka tunnetaan myös nimellä *Plancherelin kaava*. Myös tätä muotoa kutsutaan toisinaan Parsevalin kaavaksi.

Esimerkki 44 Lasketaan funktion $f(x) = \text{sinc } x$ Fourier-muunnos. Aiemmin on todettu, että suorakulmisen pulssin Π Fourier-muunnos on $\mathcal{F}[\Pi](y) = \text{sinc } y$, joten duaalisuusperiaatteen mukaan

$$\mathcal{F}[\text{sinc } x](y) = \Pi(-y) = \Pi(y).$$

Sinc-funktion spektri on siis nolla, kun $|y| > \frac{1}{2}$, mikä merkitsee sitä, että sinc-funktiolla on rajoitettu kaistanleveys.

Esimerkki 45 Osittaisintegroinnilla voidaan todeta, että integraali $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ suppenee (harjoitustehävä). Lasketaan sen arvo. Tehdään integraaliin sijoitus $x = \pi y$, jolloin saadaan

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi y}{\pi y} \pi dy = \pi \int_0^{\infty} \text{sinc } y dy = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc } y dy.$$

Viimeisin yhtäsuuruus perustuu siihen, että sinc on parillinen funktio.

Edelleen voidaan kirjoittaa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc } x dx = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc } x \cdot e^{-2\pi ix \cdot 0} dx = \mathcal{F}[\text{sinc } x](0) = \Pi(0) = 1,$$

joten

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Esimerkki 46 Olkoon $A \in \mathbb{R}$ ja $\tau > 0$. Suorakulmainen, A -korkuinen, τ -levyinen pulssi tarkoittaa funktiota $A\Pi(\frac{x}{\tau})$, jonka arvo on A kun $|x| < \frac{\tau}{2}$ ja 0, kun $|x| > \frac{\tau}{2}$. Lineaarisuuden ja skaalausperiaatteen mukaan tämän Fourier-muunnos on

$$\mathcal{F}[A\Pi(\frac{x}{\tau})](y) = A\tau \text{sinc}(\tau y). \quad (6.9)$$

Asetetaan $A = 1$ ja moduloidaan vielä tätä muokattua pulssia f -taajuisella eksponenttifunktiolla $e^{2\pi i x f}$, jolloin saadaan *katkaistu* f -taajuinen eksponenttifunktio

$$\Pi\left(\frac{x}{\tau}\right)e^{2\pi i f x} = \begin{cases} e^{2\pi i f x}, & \text{kun } |x| < \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \text{kun } |x| > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Modulointiperiaatteen (Lause 32) mukaan näin saadun funktion Fourier-muunnos on

$$\mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{x}{\tau}\right)e^{2\pi i f x}\right](y) = \tau \operatorname{sinc}(\tau(y - f)),$$

mikä siis merkitsee sitä, että katkaistu f -taajuinen eksponenttifunktio voidaan esittää Fourier'n integraalina

$$\Pi\left(\frac{x}{\tau}\right)e^{2\pi i f x} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau \operatorname{sinc}(\tau(y - f)) \cdot e^{2\pi i x y} dy.$$

Spektri $\tau \operatorname{sinc}(\tau(y - f))$ muistuttaa piikkiä, joka keskittyy kohtaan f . Piikki on sitä kapeampi ja korkeampi, mitä suurempi τ on. Tämä on tietysti hyvin luontevaa, sillä mitä suurempi τ on, sitä pidemmälle katkaistu eksponenttifunktio yhtyy katkaisemattomaan.

6.4 Delta-funktio

Palautetaan mieleen, että kantava ajatus Fourier-analyysin takana on esittää (riittävän säännölliset) funktiot $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier'n integraalina:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi i x y} dy, \quad (6.10)$$

missä $F = \mathcal{F}[f]$ toimii kerroinfunktiona; esitys (6.10) on siis f :n esitys eksponenttifunktioita $e_{\pm y}$, missä $y \in [0, \infty)$ käyttäen.

Vakavia ongelmia Fourier-analyysissä aiheuttaa sekä sovellusten että teorian tasolla kuitenkin se, että itse ”peruspalikoiden”, siis f -taajuisen eksponenttifunktioiden $e_{\pm f}(x) = e^{\pm 2\pi i x f}$ esittäminen Fourier'n integraalina on erittäin ongelmallista. Tällaista esitystä varten tulisi siis olla sellaiset funktiot δ_f , että

$$e^{2\pi i f x} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_f(y)e^{2\pi i x y} dy. \quad (6.11)$$

Fourier-analyysin perustulosten mukaan f -taajuisen eksponenttifunktion spektrin $\delta_f(y)$ pitäisi tällöin olla esitettävissä integraalina

$$\delta_f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f x} e^{-2\pi i x y} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x(y-f)} dx. \quad (6.12)$$

Integraalissa (6.12) ilmenee kuitenkin ongelmia. Suoraan määritelmään perustuen tulee laskea ensin integraali

$$\int_{-M}^M e^{-2\pi i x(y-f)} dx$$

ja määrittää raja-arvo, kun $M \rightarrow \infty$. Integraalin laskeminen onnistuu aiempien tietojen perusteella helposti: Merkitään $M = \frac{\tau}{2}$, jolloin

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-2\pi i x(y-f)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x}{\tau}\right)e^{2\pi i f x} e^{-2\pi i x y} dx = \mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{x}{\tau}\right)e^{2\pi i f x}\right](y) = \tau \operatorname{sinc}(\tau(y - f)),$$

mikä on τ -levyiseksi katkaistun f -taajuisen eksponenttifunktion spektri. Kun $M \rightarrow \infty$, myös $\tau \rightarrow \infty$, ja jo aiemmin on todettu, että tämä muistuttaa yhä enemmän pisteeseen $y = f$ keskittynyttä piikkiä, jonka korkeus kasvaa τ :n kasvaessa.

On kuitenkin helppo todeta (harjoitustehtävä), että raja-arvoa

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \operatorname{sinc}(\tau(y - f))$$

ei ole äärellisenä olemassa millään y :n arvolla, mistä seuraa, että integraali (6.12) ei suppene millään y :n arvolla. Tästä seuraa, että f -taajuisista eksponenttifunktiota $e^{2\pi i f x}$ ei voida esittää Fourier'n integraalina.

Fourier-analyysin teoria näyttää siis kokeneen kovan kolauksen: sen perustavia rakennusosia, f -taajuisia eksponenttifunktioita ei voida esittää siinä muodossa (Fourier'n integraalina), jossa Fourier-analyysi pyrkii kaikki funktiot esittämään. Tämä vastoinkäyminen on tietenkin ikävä teorian kannalta, mutta ei yhdentekevä myöskään erityisesti sähkötekniikkaan ja kvanttimekaniikkaan liittyvien sovellusten näkökulmasta.

Sovellusten tarpeiden vuoksi onkin pyritty tarvittava esitys saavuttamaan käsitteistöä laajentamalla. Vaikka lähtökohta

$$\delta_f(y) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \operatorname{sinc}(\tau(y - f))$$

osoittautuikin kestäättömäksi (raja-arvoa ei ole äärellisenä olemassa millään y :n arvolla), voidaan kuitenkin havaita, että

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \operatorname{sinc}(\tau(y - f)) = \begin{cases} 1, & \text{jos } y = f, \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

ja tämän perusteella voisi otaksua, että funktiokäsitteen δ_f yleistys (mikäli sellainen ylipäänsä voitaisiin määrittellä), pitäisi toteuttaa

$$\delta_f(y) = \delta_0(y - f).$$

ja

$$\delta_0(y) = \begin{cases} \infty, & \text{kun } y = 0, \\ 0, & \text{kun } y \neq 0. \end{cases} \quad (6.13)$$

Merkitään jatkossa $\delta_0 = \delta$ ja yleistetään vielä ehtoa (6.11) vaatimalla, että *jokaiselle* pisteessä f jatkuvalle funktiolle F pätee

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - f) F(y) dy. \quad (6.14)$$

Ehdon (6.13) mukaan $\delta(y - f)$ tulee olla nolla kaikkialla muualla paitsi pisteessä $y = f$, ja tätä taustaa vasten ehdon (6.14) tulkinta on seuraava: δ -funktio $\delta(y - f)$ ”poimii” funktion F arvon $F(f)$ integraalista (6.14).

Määritelmä 23 Diracin δ -funktio on yleistetty funktio, joka toteuttaa ehdon (6.14) ja jonka arvot reaali-funktioksi tulkittuna toteuttavat ehdon (6.13).

Edellisen määritelmän mukaan

$$e^{2\pi i x f} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - f) e^{2\pi i x y} dy,$$

siis f -taajuisen eksponenttifunktion $x \rightarrow e^{2\pi i x f}$ spektri on

$$\mathcal{F}[e^{2\pi i x f}](y) = \delta(y - f).$$

Erityisesti vakiofunktiolle 1 ($f = 0$) saadaan

$$\mathcal{F}[1](y) = \delta(y).$$

Edellä kuvailtu delta-funktio ei siis ole reaalifunktio, vaan yleistetty funktio, jolle tavalliset reaalifunktioiden ominaisuudet eivät välttämättä ole voimassa. Se ei esimerkiksi saa mitään reaaliarvoa nollassa ja toimii integraaleissa toisin kuin reaalifunktiot:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\delta(x - x_0) dx = F(x_0),$$

siis delta-funktio ”poimii” arvon $F(x_0)$ yllä olevasta integraalista.

On olemassa useita loogisesti tyydyttäviä tapoja määritellä Diracin delta-funktio, mutta valitettavasti näistä jokainen veisi kohtuuttomasti resursseja. Sen vuoksi tällä kurssilla tyydytään määritelmään 23, joka oikeastaan ei ole määritelmä vaan funktion δ kuvailu reaalifunktioiden ominaisuuksista lähtien. Loogisesti kestävä määritelmä olisi luonnollisesti tarpeen δ -funktion ominaisuuksien johtamista varten, mutta tässä kurssissa tarkka määritelmä sivuutetaan.

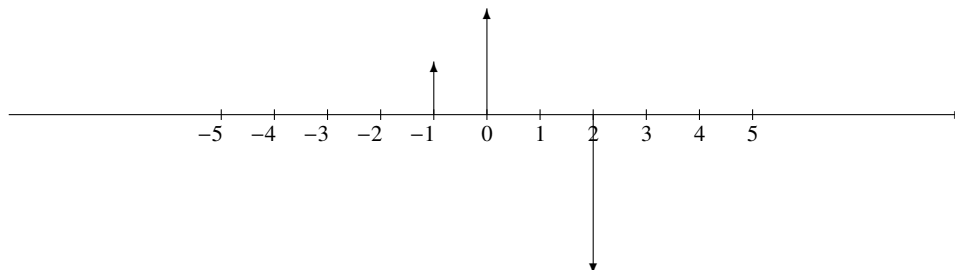
Taustatietoa



Paul Dirac (1902–1984) oli englantilainen fyysikko, joka kehitti kvanttimekaniikkaa ja kvanttisähködynamikkaa. Dirac kehitti suhteellisuusteorian mukaisen esityksen elektronin aaltofunktiolle. Hänelle myönnettiin fysiikan Nobel-palkinto 1933.

(kuva: Wikimedia Commons)

Yleisen käytännön mukaan delta-funktion kuvaajaksi piirretään yksikköpituinen nuoli origosta ylöspäin. Vastaavasti funktioita $2\delta(x)$ ja $-3\delta(x - 2)$ kuvataan 2- ja 3-pituisilla nuolilla, joista ensimmäinen osoittaa origosta ylöspäin, ja toinen pisteestä $x = 2$ alaspäin.



Kuva 6.1 Funktion $\delta(x + 1) + 2\delta(x) - 3\delta(x - 2)$ kuvaaja

6.4.1 Konvoluutio

Laskemisen kannalta lauseen 30 ilmaisema lineaarisuus on yleensä toivottava ominaisuus, mutta funktioiden tulolle ei vastaavaa ominaisuutta ole: yleensä nimittäin

$$\mathcal{F}[fg] \neq \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g].$$

Sen sijaan on mahdollista määritellä operaatio, joka käyttäytyy muodollisesti tulon tavoin ja jonka suhteen Fourier-muunnokset jakautuvat tuloksi.

Määritelmä 24 (Konvoluutio) Funktioiden f ja g konvoluutio määritellään seuraavasti:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt$$

Konvoluution perusominaisuudet on helppo johtaa integraalien ominaisuuksista:

Lause 37 Kaikille funktioille f, g ja $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, joille alla esitetyt konvoluutiot on olemassa, pätee

- $f * g = g * f$,
- $f * (g * h) = (f * g) * h$,
- $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha f * g + \beta f * h$,
- $D(f * g) = Df * g = f * Dg$.

Todistus Harjoitustehtävä. □

Konvoluution määritelmä itse asiassa perustuu siihen, että seuraavan lauseen, jonka todistus sivuutetaan, halutaan toteutuvan.

Lause 38

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] \quad \text{ja} \quad \mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g].$$

Edellä määritely konvoluutio ei ole ainoa mahdollinen, vaan Laplace-muunnosten yhteydessä perehdytään myös toisenkaltaiseen konvoluutioon. Itse asiassa jokaista Fourier-muunnoksen kaltaista operaatiota kohti määritetty oma konvoluutiokäsitteensä.

Esimerkki 47 Olkoon $\tau_1 \geq \tau_2 > 0$ ja tarkastellaan kahta erikokoista suorakulmaista pulssia

$$f(x) = \begin{cases} A_1, & \text{kun } |x| \leq \frac{\tau_1}{2}, \\ 0, & \text{kun } |x| > \frac{\tau_1}{2}, \end{cases}$$

ja

$$g(x) = \begin{cases} A_2, & \text{kun } |x| \leq \frac{\tau_2}{2}, \\ 0, & \text{kun } |x| > \frac{\tau_2}{2}. \end{cases}$$

Tällöin

$$(f * g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt = \int_{-\frac{\tau_1}{2}}^{\frac{\tau_1}{2}} A_1 g(x-t) dt = A_1 \int_{x-\frac{\tau_1}{2}}^{x+\frac{\tau_1}{2}} g(u) du$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{kun } x < -\frac{\tau_1+\tau_2}{2} \\ A_1 \int_{-\frac{\tau_2}{2}}^{x+\frac{\tau_1}{2}} A_2 du = A_1 A_2 (x + \frac{\tau_1+\tau_2}{2}), & \text{kun } -\frac{\tau_1+\tau_2}{2} \leq x < -\frac{\tau_1-\tau_2}{2} \\ A_1 \int_{-\frac{\tau_2}{2}}^{\frac{\tau_2}{2}} A_2 du = A_1 A_2 \tau_2, & \text{kun } -\frac{\tau_1-\tau_2}{2} \leq x < \frac{\tau_1-\tau_2}{2} \\ A_1 \int_{x-\frac{\tau_1}{2}}^{\frac{\tau_2}{2}} A_2 du = A_1 A_2 (-x + \frac{\tau_1+\tau_2}{2}), & \text{kun } \frac{\tau_1-\tau_2}{2} \leq x < \frac{\tau_1+\tau_2}{2}, \\ 0, & \text{kun } x \geq \frac{\tau_1+\tau_2}{2}. \end{cases}$$

Jos $\tau_1 = \tau_2$, on tulos niin kutsuttu *kolmiopulssi*, jota merkitään symbolilla Λ .

Esimerkki 48 Olkoon Λ kolmiopulssi, jonka leveys on 2τ ja korkeus A . Aiemman esimerkin mukaan Λ saadaan konvoluutiona kahdesta τ -levyisestä suorakulmaisesta pulssista Π , joiden korkeus on $\sqrt{\frac{A}{\tau}}$.

Tällöin

$$\mathcal{F}[\Lambda](y) = \mathcal{F}[\Pi * \Pi](y) = (\mathcal{F}[\Pi](y))^2 = (\sqrt{\frac{A}{\tau}} \tau \operatorname{sinc} \tau y)^2 = A \tau \operatorname{sinc}^2 \tau y.$$

Käytetään jälleen merkintää $\delta_y(x) = \delta(x-y)$. Delta-funktion määrittelevän ehdon (6.14) mukaan

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta_y(x) dy, \quad (6.15)$$

ja näin saatu yhtälö tarjoaa jälleen yhden tulkinnan δ -funktioille: Kaikki reaaliakselilla määritellyt, kompleksiarvoiset funktiot voidaan esittää funktioiden δ_y , missä $y \in \mathbb{R}$ avulla integraalina (6.15). Tällöin siis kerroinfunktiona toimii itse funktio f !

Konvoluution määritelmän perusteella yhtälö (6.15) voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(x) = (f * \delta)(x),$$

kunhan f on jatkuva. Tämä merkitsee, että δ -funktio on ns. identiteettialkio konvoluution suhteen samoin kuin ykkönen on identiteettialkio reaalilukujen kertolaskun suhteen.

Lause 39 Delta-funktiolla on seuraavat ominaisuudet:

1. $\delta(-x) = \delta(x)$,
2. $x\delta(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$,
3. $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, kun $a > 0$,
4. $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

Todistus Sivuuetaan. □

Koska δ -funktio ei ole tavallinen reaalifunktio vaan yleistetty funktio, saattaa käydä niin että totut integraaleja koskevat kaavat eivät välttämättä päde. Erikoistapauksissa on tällöin käytettävä δ -funktion määritelmää yleistettynä funktiona (jota ei tällä kurssilla käsitellä). Tavanomaiseen tapaan voidaan kyllä todeta, että jos $c \in (a, b)$, niin

$$\int_a^b \delta(x-c) dx = \int_{-\infty}^a \delta(x-c) dx + \int_a^b \delta(x-c) dx + \int_b^{\infty} \delta(x-c) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-c) dx = 1, \quad (6.16)$$

mutta sen sijaan tapaus jossa δ -funktion äärettömyyskohta esiintyy integrointirajan reunapisteessä on ongelmallinen. Integraali

$$\int_a^c \delta(x-c) dx$$

nimitään tulkitaan raja-arvoksi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon} \delta(x-c) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 0 = 0.$$

ja samoin

$$\int_c^b \delta(x-c) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon}^b \delta(x-c) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 0 = 0,$$

Täten siis alkuperäisen integraalin (6.16) katkaisu pisteessä c ei tuota odotettua tulosta.

Esimerkki 49 Määritetään kosinifunktion $x \rightarrow \cos(2\pi f x)$ Fourier-muunnos. Eulerin kaavasta seuraa, että

$$\cos(2\pi f x) = \frac{1}{2}(e^{2\pi i f x} + e^{-2\pi i f x}),$$

joten

$$\mathcal{F}[\cos(2\pi f x)](y) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{2\pi i f x}](y) + \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-2\pi i f x}](y) = \frac{1}{2}\delta(y-f) + \frac{1}{2}\delta(y+f).$$

Samalla tavoin voidaan määrittää sinifunktion $x \rightarrow \sin(2\pi f x)$ Fourier-muunnos

$$\mathcal{F}[\sin(2\pi f x)](y) = \frac{1}{2i}\delta(y-f) - \frac{1}{2i}\delta(y+f).$$

Esimerkki 50 Esitetään ideat, jotka tarkemmin perusteltuina johtavat Parsevalin kaavaan (Lause 36).

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\overline{G(y)} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(r)e^{-2\pi i r y} dr \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(s)e^{-2\pi i s y}} ds dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(r)e^{-2\pi i r y} dr \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(s)}e^{2\pi i s y} ds dy \\ &= \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{r=-\infty}^{\infty} \int_{s=-\infty}^{\infty} f(r)\overline{g(s)}e^{-2\pi i r y} e^{2\pi i s y} dr ds dy \\ &= \int_{r=-\infty}^{\infty} \int_{s=-\infty}^{\infty} f(r)\overline{g(s)} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(r-s)y} dy ds dr \\ &= \int_{r=-\infty}^{\infty} \int_{s=-\infty}^{\infty} f(r)\overline{g(s)}\delta(r-s) ds dr = \int_{r=-\infty}^{\infty} f(r) \int_{s=-\infty}^{\infty} \overline{g(s)}\delta(r-s) ds dr \\ &= \int_{r=-\infty}^{\infty} f(r)\overline{g(r)} dr. \end{aligned}$$

Ylläolevassa yhtälöketjussa jäi perustelematta myös integrointijärjestysten vaihtaminen.

6.4.2 Heavisiden funktio

Määritelmä 25 Heavisiden askelfunktio määritellään seuraavasti:

$$H(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(x) + 1) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{jos } x = 0, \\ 1, & \text{jos } x > 0. \end{cases}$$

On helppo huomata, että

$$\Pi(x) = H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

missä Π on aiemmin määritelty suorakulmainen pulssi. Heavisiden askelfunktio on tavallinen reaalfunktio, joka on derivoituva kaikkialla muualla paitsi pisteessä $x = 0$. Yleistettyjen funktioiden avulla voidaan kuitenkin määrittellä Heavisiden askelfunktion derivaatta kaikkialla:

$$\frac{d}{dx}H(x) = \delta(x), \quad (6.17)$$

jolloin myös

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt. \quad (6.18)$$

Taustatietoa



Oliver Heaviside (1850–1925) oli englantilainen sähköinsinööri, matemaatikko ja fyysikko, joka toi kompleksilukujen käytön sähkötekniikan teoriaan. Heaviside keksi operaattorimenetelmän RCL-piirien dynamiikkaa kuvaavien differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi, kehitti vektorianalyysyä ja sen keinoin yksinkertaisti Maxwellin sähkömagnetismia kuvaavat yhtälöt nykyiseen muotoonsa. Heaviside oli etevä oppilas, mutta lähes kuuroutui nuorena, jätti koulun 16-vuotiaana eikä suorittanut tutkintoja, vaan opiskeli sittemmin itsenäisesti.

(kuva: Wikimedia Commons)

Esimerkki 51 Etsitään Heavisiden funktiolle Fourier-muunnos. Esityksen

$$H(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(x) + 1)$$

perusteella saadaan

$$\mathcal{F}[H(x)](y) = \frac{1}{2}(\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x)](y) + \mathcal{F}[1](y)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi iy} + \delta(y)\right).$$

Esimerkki 52 Derivointia koskevan ominaisuuden (Lause 35) mukaan

$$\mathcal{F}[h'(x)](y) = 2\pi iy\mathcal{F}[h(x)](y).$$

Olkoon

$$h(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

jolloin analyysin peruslauseen mukaan $h'(x) = f(x)$ ja derivointia koskeva kaava näyttäisi tuottavan integrointia koskevan kaavan

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^x f(t) dt\right](y) = \frac{1}{2\pi iy} \mathcal{F}[f(x)](y).$$

Yllä oleva kaava on kuitenkin yleisesti ottaen virheellinen, sillä derivointia koskevan kaavan todistuksessa oletettiin, että $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$. Tätä ehtoa ei $h(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ välttämättä täytä, vaikka f täyttäisikin. Lisäksi on huomattava, että analyysin peruslause takaa yhtäsuuruuden $h'(x) = f(x)$ pätevän vain niissä pisteissä, missä f on jatkuva.

Esitys integraalin Fourier-muunnokselle saadaan seuraavasti:

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-t)f(t) dt = (H * f)(x),$$

joten

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^x f(t) dt\right] = \mathcal{F}[(H * f)](y) = \mathcal{F}[H](y) \cdot \mathcal{F}[f](y) = \left(\frac{1}{2\pi iy} + \frac{\delta(y)}{2}\right) \mathcal{F}[f](y).$$

Yllä olevassa kaavassa voidaan vielä ottaa huomioon, että $\delta(y) = 0$, kun $y \neq 0$, joten kaava voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^x f(t) dt\right] = \frac{1}{2\pi iy} \mathcal{F}[f](y) + \frac{\delta(y)}{2} \mathcal{F}[f](0),$$

mikäli $\mathcal{F}[f]$ on tavallinen reaalfunktio, joka on rajoitettu kaikilla äärellisillä väleillä.

6.5 Keskusmomentit ja epätarkkuusrelaatio

Jos $f(x) \geq 0$ ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$

sanotaan, että f on *todennäköisyysjakauma*. Todennäköisyysjakaumaan liitetään *satunnaismuuttuja* X , jonka tulkitaan saavan arvo välillä $[a, b]$ todennäköisyydellä

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Määritelmä 26 Olkoon f kuten edellä ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\alpha_n(X) = \mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx,$$

on satunnaismuuttujan X n :s *origomomentti*. Ensimmäistä origomomenttia kutsutaan satunnaismuuttujan *keskiarvoksi* tai *odotusarvoksi* ja merkitään

$$\mu = \alpha_1(X) = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Määritelmä 27 Olkoon f reaalfunktio, $\mu = \mathbb{E}(X)$ ja $n \in \mathbb{N}$. Lukua

$$\mu_n(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^n) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n f(x) dx$$

kutsutaan satunnaismuuttujan X n :ksi *keskusmomentiksi*.

Yllä olevasta määritelmästä seuraa, että $\mu_0(X) = 1$ ja $\mu_1(X) = 0$.

Määritelmä 28 Satunnaismuuttujan X toista keskusmomenttia

$$\mu_2(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

kutsutaan *varianssiksi*. Varianssista käytetään myös merkintää $\text{Var}(X)$. Varianssin neliöjuuri $\sigma = \sqrt{\mu_2(X)}$ on nimeltään *keskihajonta*.

Määritelmänsä mukaisesti varianssi on satunnaismuuttujan $(X - \mu)^2$ keskiarvo (odotusarvo). Täten varianssi siis kuvaa sitä, kuinka suuri poikkeaman neliö $(x - \mu)^2$ on keskimäärin. Varianssi on sitä pienempi, mitä todennäköisemmin satunnaismuuttujan arvot löytyvät keskiarvon μ lähetyviltä. Varianssi mittaa siis satunnaismuuttujan jakauman leveyttä. Myös kolmatta ja neljättä keskusmomenttia käytetään kuvaamaan jakauman muotoa: niiden avulla määritellään *vinous* $\frac{\mu_3}{\sigma^3}$ ja *kurtosis* $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$, joka kuvaa jakauman terävyyttä.

Esimerkki 53 Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{kun } 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Tällöin f on sellaisen satunnaismuuttujan X jakauma, joka saa reaaliarvoja väliltä $[0, 10]$ tasaisella todennäköisyydellä. Satunnaismuuttujan keskiarvo on

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{10} \int_0^{10} x dx = \frac{1}{10} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{10} = 5$$

ja varianssi

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - 5)^2 f(x) dx = \frac{1}{10} \int_0^{10} (x - 5)^2 dx = \frac{1}{10} \left[\frac{1}{3} (x - 5)^3 \right]_0^{10} = \frac{25}{3} \approx 8,33.$$

Esimerkki 54 Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2000}(10^2 - x^2), & \text{kun } x \in [0, 10] \\ 0 & \text{muulloin,} \end{cases}$$

jolloin $f(x)$ määrittelee satunnaismuuttujan X jakauman, jossa X saa kaikkein todennäköisimmin arvoja luvun 0 läheltä.

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{3}{2000} \int_0^{10} x(10^2 - x^2) dx = \frac{15}{4} = 3,75,$$

ja

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \frac{15}{4})^2 f(x) dx = \frac{3}{2000} \int_0^{10} (x - \frac{15}{4})^2 \cdot (10^2 - x^2) dx = \frac{95}{16} \approx 5,94.$$

Edellisen esimerkin keskihajonta on suurempi, koska jakauma on ”leveämpi”.

Keskusmomentit voidaan ilmoittaa origomomenttien avulla Newtonin binomikaavaa ja integraalin lineaarisuutta käyttäen. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mu_2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= \alpha_2 - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1 = \alpha_2 - \mu^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.\end{aligned}$$

Fourier-analyysi tarjoaa työkaluja keskusmomenttien määrittämiseen. Jos nimittäin funktiolla $f(x)$ on olemassa Fourier-muunnos $F(y)$, on

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx$$

ja siis nollas origomomentti saadaan yksinkertaisesti:

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \alpha_0.$$

Jatkossa käytetään nimityksiä keskusmomentti ja origomomentti siitä riippumatta, onko f todennäköisyysjakauma. Derivointia koskevan lauseen (Lause 35) duaalimuodon mukaan

$$F^{(n)}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i x)^n f(x) e^{-2\pi i x y} dx = (-2\pi i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) e^{-2\pi i x y} dx$$

jolloin siis origomomentit saadaan Fourier-muunnoksen derivaattojen avulla:

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = \frac{F^{(n)}(0)}{(-2\pi i)^n}. \quad (6.19)$$

Tutkittaessa katkaistua eksponenttifunktiota todettiin, että mitä ”leveämpi” katkaisu on, sitä ”kapeampi” on vastaava spektri – ja päinvastoin. Varianssin käsite on luonteva jakauman leveyden mittari ja Fourier-muunnosten ominaisuudet tarjoavat keinot arvioida jakauman leveyttä suhteessa sen Fourier-muunnoksen leveyteen.

Seuraavan lauseen todistuksessa tarvitaan Fourier-muunnosten ominaisuuksien lisäksi myös ns. Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä

$$\left(\int g f \right)^2 \leq \int f^2 \int g^2,$$

joka pätee myös äärettömille integrointiväleille, kunhan integraalit ovat olemassa. Cauchyn-Schwarzin epäyhtälölle tunnetaan lyhyt todistus, johon perehdytään myöhemmin. Sen sijaan tässä yhteydessä voidaan johtaa helppo seuraus Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöstä:

$$\left| \int (\bar{f}g + f\bar{g}) \right| \leq \int |\bar{f}g + f\bar{g}| \leq \int (|\bar{f}g| + |f\bar{g}|) = 2 \int |f| |g| \leq 2 \left(\int |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lisäksi on muistettava kompleksiluvuista, että $|z|^2 = z\bar{z}$, missä \bar{z} on z :n kompleksikonjugaatti.

Fourier-muunnosparien jakaumien leveyksiä arvioi seuraava lause:

Lause 40 (Heisenbergin epäyhtälö) *Olko x_0 ja $y_0 \in \mathbb{R}$. Jos funktiolla f on Fourier-muunnos F ja raja-arvot $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x |f(x)|$ ovat olemassa, niin*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^2 \leq 16\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (y - y_0)^2 |F(y)|^2 dy.$$

Todistus Todistetaan lause vain tapauksessa $x_0 = y_0 = 0$. Yleisen tapauksen todistus on samankaltainen, mutta sisältää enemmän teknisiä yksityiskohtia.

Huomautuksen 22 mukaan $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x |f(x)|^2 = 0$, joten osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} x |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} |f(x)|^2 dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} (f(x) \overline{f(x)}) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} x (f'(x) \overline{f(x)} + f(x) \overline{f'(x)}) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} (f'(x) \overline{x f(x)} + x f(x) \overline{f'(x)}) dx. \end{aligned}$$

Edellä todetusta Cauchyn-Schwartzin epäyhtälön johdannaisesta seuraa tällöin

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^2 \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx.$$

Parsevalin yhtälön ja derivaatan Fourier-muunnoskaavan perusteella jälkimmäinen integraali voidaan kirjoittaa muotoon

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f'(x)](y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |2\pi i y F(y)|^2 dy = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 |F(y)|^2 dy.$$

Yhdistämällä edellä saadut arviot saadaan

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^2 \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 |F(y)|^2 dy,$$

mikä on Heisenbergin epäyhtälö tapauksessa $x_0 = y_0 = 0$. □

Taustatietoa



Werner Heisenberg (1901–1976) oli saksalainen fyysikko, jota pidetään yhtenä kvanttimekaniikan perustajista. Heisenberg ei todistanut nimeään kantavaa epätarkkuusperiaatetta vaan esitti sen hypoteesina. Epätarkkuusperiaatteen lisäksi Heisenbergin ansioihin luetaan *matriisimekaniikan* kehittäminen M. Bornin ja P. Jordanin kanssa. Matriisimekaniikka on Schrödingerin aaltomekaniikan kanssa matemaattisesti yhtäpitävä mutta eri näkökulmasta kehitetty lähestymistapa kvanttifysiikkaan. Heisenbergille myönnettiin 1932 fysiikan Nobel-palkinto.

(kuva: Wikimedia Commons)

Huomautus 24 Tarvittavien integraalien olemassaollessa on mahdollista *normalisoida* funktio f , mikä merkitsee funktion f jakamista luvulla $\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2$. Näin saadulle uudelle funktiolle vastaava integraali on 1.

Jos siis $f(x)$ on normalisoitu, on $|f(x)|^2$ todennäköisyysjakauma. Kutsutaan tämän jakauman mukaista satunnaismuuttujaa nimellä X . Plancherelin yhtälön mukaan myös $F(y) = \mathcal{F}[f(x)](y)$ on myös normalisoitu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1,$$

joten myös $|F(y)|^2$ on todennäköisyysjakauma; olkoon Y tähän liittyvä satunnaismuuttuja. Jos vielä valitaan $x_0 = \mathbb{E}(X)$ ja $y_0 = \mathbb{E}(Y)$, voidaan Heisenbergin epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Näin saatu epäyhtälö kertoo sen, että jos X :n jakauma on ”kapea” (varianssi pieni), on Y :n jakauman oltava ”leveä” (varianssi suuri) ja päinvastoin.

Huomautus 25 Kvanttimekaniikassa hiukkaset esitetään kompleksiarvoisten aaltofunktioiden ψ avulla. Aaltofunktiot oletetaan normalisoiduiksi, siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

Aaltofunktio sisältää kaikki hiukkasen (kvantti)fysikaaliset ominaisuudet: tavanomaisessa esityksessä $\psi(x)$ edustaa hiukkasen paikkaa ja sen Fourier-muunnos $\hat{\psi}(p)$ liikemäärää. Kvanttimekaniikka on *probabilistinen* teoria, jossa hiukkasen ominaisuuksia ei voida yleensä kuvata tarkasti vaan ainoastaan teorian ennustamalla todennäköisyyksillä. Max Bornin esittämän kvanttimekaniikan standarditulkinnan mukaan $|\psi(x)|^2$ on hiukkasen paikan todennäköisyysjakauma ja $|\hat{\psi}(p)|^2$ sen liikemäärän todennäköisyysjakauma. Tämä merkitsee sitä, että

$$\mathbb{P}(a \leq x \leq b) = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx$$

on todennäköisyys löytää hiukkanen väliltä $[a, b]$ ja erityisesti

$$\mu_x = \mathbb{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$$

on hiukkasen paikan keskiarvo (odotusarvo). Samoin

$$\mu_p = \mathbb{E}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} p |\hat{\psi}(p)|^2 dp$$

on hiukkasen liikemäärän odotusarvo. Merkitään X :llä satunnaismuuttujaa, joka saa arvokseen hiukkasen paikan jakauman $|\psi|^2$ mukaan ja P :llä satunnaismuuttujaa, joka puolestaan saa arvokseen liikemäärän jakauman $|\hat{\psi}|^2$ mukaan. Heisenbergin epäyhtälö saa tällöin asun

$$\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(P) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

ja seuraavan tulkinnan: Hiukkasen paikkaa ja liikemäärää ei voida samanaikaisesti mitata mielivaltaisen tarkasti. Tämä tulkinta tunnetaan nimellä *Heisenbergin epätarkkuusperiaate* ja se koskee paikan ja liikemäärän lisäksi mitä hyvänsä kvanttimekaanisia suureita, joiden jakaumat saadaan Fourier-muunnospareista. Heisenbergin epätarkkuusperiaate ei siis riipu *menetelmistä* joilla paikka ja liikemäärä mitataan, vaan se on seuraus kvanttimekaniikan matemaattisesta rakenteesta. Yleisimmin tunnetussa muodossa Heisenbergin epätarkkuusperiaatteessa esiintyy myös suurejärjestelmästä johtuva *Planckin vakio*.

6.6 Nyquistin näytteenottotaajuus

Fourier-muunnosten laajimmin nykyisin esiintyvät sovellukset kohdistuvat tallennetun signaalin (äänen, kuvan, tilastollisen datan jne) käsittelyyn. Tällöin käsiteltävää signaalia kuvataan yleensä reaalifunktiona, mutta lauseketta tälle ei ole tiedossa. Sen sijaan tunnetaan funktion arvot äärellisen monessa pisteessä.

Yleisesti ottaen signaalin taltiointi ei onnistu, mikäli havaintopisteitä (näytteitä) on vain äärellinen määrä. Ääretönkään määrä ei välttämättä takaa onnistunutta taltiointia, kuten seuraava esimerkki osoittaa:

Esimerkki 55 Olkoon $B > 0$ ja $s_B(x) = \sin(2\pi Bx)$. Tällöin $s_B(x) = 0 \iff 2\pi Bx = k \cdot \pi \iff x = \frac{k}{2B}$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Tämä merkitsee sitä, että jos signaalin s_B arvoja rekisteröidään ajanhetkinä

$$\dots, -2 \cdot \frac{1}{2B}, -1 \cdot \frac{1}{2B}, 0 \cdot \frac{1}{2B}, 1 \cdot \frac{1}{2B}, 2 \cdot \frac{1}{2B}, 3 \cdot \frac{1}{2B}, \dots,$$

ei saada esille signaalia $s_B(x)$, vaan vakiosignaali 0. Täten siis B -taajuisen signaalin rekisteröimiseen ei aina riitä näytteenotto $\frac{1}{2B}$ -mittaisen ajan välein, vaan näytteitä tulisi ottaa tiheämmin.

Seuraava lause osoittaa, että edellisessä esimerkissä esiintynyt aikaväli $\frac{1}{2B}$ on rajatapaus: Jos näytteitä olisi tunnettu vähänkin tiheämmin kuin $\frac{1}{2B}$ -mittaisin ajanvälein, olisi funktio $s_B(x) = \sin(2\pi Bx)$ saatu rekonstruoitua täydellisesti.

Lause 41 (Nyquistin-Shannonin näytteenottolause) *Olkoon $B > 0$ ja f sellainen, että $\mathcal{F}[f]$ on olemassa. Jos funktio f ei sisällä B :tä eikä sitä korkeampia taajuuksia, voidaan f selvittää epäjatkuvuuspisteitä lukuunottamatta arvojen $d_n = f(\frac{n}{2B})$, missä $n \in \mathbb{Z}$, perusteella.*

Lauseessa esiintyvää väliä $\frac{1}{2B}$ sanotaan *Nyquistin näytteenottoväliksi*.

Ennen todistusta palautetaan mieleen, että f sisältää taajuuden B , mikäli funktion f spektri F saa nollasta poikkeavan arvon pisteessä B tai $-B$. Lauseen oletus tarkoittaa siis sitä, että $F(y) = 0$ aina, kun $|y| \geq B$.

Todistus Koska f ei sisällä B :tä korkeampia taajuuksia, voidaan integrointi f :n esityksessä spektrinsä avulla rajoittaa äärelliselle välille:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi ixy} dy = \int_{-B}^B F(y)e^{2\pi ixy} dy.$$

Oletuksen mukaan arvot

$$d_{-n} = f\left(\frac{-n}{2B}\right) = \int_{-B}^B F(y)e^{-\frac{2\pi in}{2B}y} dy$$

tunnetaan kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, mutta nämä ovat kerrointa $\frac{1}{2B}$ vaille funktion $F(y)$ Fourier-kertoimet, joten

$$F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_{-n}}{2B} e^{\frac{2\pi in}{2B}y}.$$

Tällöin siis $F(y)$ voidaan rekonstruoida välillä $[-B, B]$, mutta tämä riittää, sillä F oletettiin nolllaksi tämän välin ulkopuolella. Nyt kun spektri $F(y)$ voidaan rekonstruoida, voidaan alkuperäinen funktio saada tästä Fourier'n integraalilla:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-B}^B F(y)e^{2\pi ixy} dy = \int_{-B}^B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_{-n}}{2B} e^{\frac{2\pi in}{2B}y} e^{2\pi ixy} dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_{-n}}{2B} \int_{-B}^B e^{2\pi iy(x + \frac{n}{2B})} dy \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_{-n}}{2B} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{y}{2B}\right) e^{2\pi iy(x + \frac{n}{2B})} dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_{-n}}{2B} \cdot 2B \operatorname{sinc}\left(2B\left(x + \frac{n}{2B}\right)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{-n} \operatorname{sinc}(2Bx + n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \operatorname{sinc}(2Bx - n). \end{aligned}$$

Näin saatu rekonstruktio

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \operatorname{sinc}(2Bx - n)$$

tunnetaan nimellä *Shannonin-Whittakerin interpolaatiokaava*. □

Huomautus 26 Jos näytteenottoväli on suurempi kuin $\frac{1}{2B}$, sanotaan vaikkapa $\frac{1}{2B'}$, missä $B' < B$, voidaan funktiota f yrittää rekonstruoida Whittakerin–Shannonin interpolaatiokaavan mukaisesti, mutta tällöin signaali ei toistu alkuperäisen kaltaisena, vaan saattaa esiintyä erityisesti kuvankäsittelyssä epätoivottu ilmiö, josta käytetään nimeä *laskostuminen* (engl. *aliasing*).

Huomautus 27 Mieti minkälainen on funktioiden $F(x)$ ja $\Pi(\frac{x}{2B})$ konvoluutio.

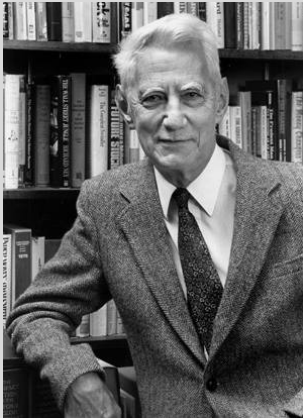
Taustatietoa



Harry Nyquist (1889–1976) oli ruotsalaissyntyinen sähköinsinööri. Hän tarkasteli mm. lämpöliikkeen aiheuttamia häiriöitä tiedonsiirrossa, takaisinkytkennän vahvistusta ja kaistanleveyden vaikutusta tiedonsiirtoon.

(kuva: Wikimedia Commons)

Taustatietoa



Claude Shannon (1916–2001) oli amerikkalainen sähköinsinööri, jota laaja-alaisen ja -merkityksellisten töidensä perusteella pidetään nykyaikaisen informaatioteorian perustajana. Shannonilta on peräisin informaation käsitteen matemaattiset perusteet ja perustulokset häiriöisten tiedonsiirtokanavien aiheuttamien virheiden korjaamisesta. Nyquistin töiden perusteella Shannon myös esitti näytteenottolauseen todistuksen.

(kuva: Wikimedia Commons)

6.7 Fourier-sarjojen ja integraalien yhteys

Fourier-sarjoilla ja Fourier'n integraaleilla on samanlainen merkitys: Kumpikin edustaa funktion esitystä jaksollisten funktioiden avulla. Fourier'n integraalissa

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi ixy} dy$$

eksponenttifunktioiden taajuudet y käyvät läpi koko reaaliakselin, jolloin sanotaan että spektri $F(y)$ on jatkuva. Spektrin jatkuvuudesta seuraa, että f ei välttämättä ole jaksollinen, vaikka kaikki eksponenttifunktiot $x \mapsto e^{2\pi ixy}$ ovatkin. Fourier'n sarjassa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi in}{T}x}$$

taajuudet ovat jakson käänteisluvun $\frac{1}{T}$ kokonaislukumonikertoja, jolloin sanotaan, että spektri F_n on diskreetti. Kuten aiemmin todettiin, on funktiolla f tällöin välttämättä jakso T .

Erona Fourier'n integraalin ja sarjan välillä on siis se, että integraaliesityksessä f voi olla jaksottomana määriteltä koko reaaliakselilla, kun taas sarjaesityksessä f on määriteltä jollakin T -pituisella välillä $[\alpha, \alpha + T]$ ja laajenee koko reaaliakselille jaksollisuuden perusteella. Yhtäläisyyksien vertaamista varten palautetaan mieleen, että Fourier'n integraalin spektri $F(y)$ saadaan myös Fourier'n integraalina:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx$$

ja että vastaavasti Fourier-sarjojen spektri F_n saadaan integraalina

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)e^{-\frac{2\pi in}{T}x} dx.$$

Fourier-integraaleja käsittelevässä luvussa todettiin, että integraaliesitys on olemassa sellaisille funktioille, joille integraali $\int_{-\infty}^{\infty} |f|$ suppenee. Tämä edellyttää erityisesti sitä, että funktion f arvot lähestyvät nollaa, kun $x \rightarrow \pm\infty$. Tämä ei voi toteutua yhdellekään jaksolliselle funktiolle (joka ei ole nollafunktio), joten jaksollisilla funktioilla ei voi olla Fourier-muunnosta, ts. esitystä Fourier'n integraalina tavallisten funktioiden avulla. Sen sijaan, kuten aiemmin todettiin, δ -funktion avulla voidaan esittää Fourier'n integraalina moniakkin sellaisia funktioita, joiden arvot eivät lähesty nollaa kohti kun $x \rightarrow \pm\infty$. Tarkastellaan seuraavaksi siis miltä jaksollisen funktion Fourier-muunnos näyttäisi δ -funktion avulla ilmaistuna.

Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -jaksollinen funktio, joka on integroitava yli välin $[\alpha, \alpha + T]$. Tällöin f saa samat arvot jokaisella välillä $[\alpha + nT, \alpha + (n+1)T]$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Funktion f Fourier-muunnoksen määrittäminen näistä lähtökohdista johtaa kuitenkin varsin työlääseen tehtävään, jossa pitäisi mm. selvittää uusi esitysmuoto δ -funktiolle, joten lähdetään mieluummin liikkeelle toisesta näkökulmasta, ja arvataan, että funktion f Fourier-muunnoksen pitäisi olla saatavissa Fourier-sarjasta seuraavasti: Jos

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi in}{T}x},$$

niin silloin funktion f spektrinä toimii jono F_n , jossa F_n vastaa taajuutta $\frac{n}{T}$. Tällöin siis jatkuva spektri $F(y)$ pitäisi esittää δ -funktiota käyttäen diskreettinä spektrinä. Ilmeinen mahdollisuus tähän on määritellä

$$F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(y - \frac{n}{T}), \quad (6.20)$$

ja tarkastetaan onko näin määriteltä $F(y)$ funktion f spektri. Tätä varten lasketaan Fourier'n integraali

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi ixy} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(y - \frac{n}{T}) e^{2\pi ixy} dy \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - \frac{n}{T}) e^{2\pi ixy} dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{2\pi ix \frac{n}{T}} = f(x), \end{aligned}$$

joten spektri (6.20) näyttäisi olevan oikein määriteltä. On kuitenkin huomautettava, että edellä olevassa yhtälöketjussa on vaihdettu summauksen ja integroinnin järjestystä ilman perusteluja sekä käytetty tällä kurssilla tarkemmin määrittelemätöntä δ -funktiota, joten yhtälöketjua ei voida pitää täsmällisenä todistuksena.

Esimerkki 56 2π -jaksollisella, 1-levyisellä pulssifunktiolla $f(x)$ on Fourier-sarja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n}{2\pi}\right) e^{inx}$$

(miksi?). Yhtä hyvin voidaan siis määritellä

$$F(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n}{2\pi}\right) \delta(y - \frac{n}{2\pi}),$$

jolloin samalle funktiolle saadaan integraaliesitys

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2\pi}\right) \delta\left(y - \frac{n}{2\pi}\right) e^{2\pi ixy} dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2\pi}\right) \delta\left(y - \frac{n}{2\pi}\right) e^{2\pi ixy} dy \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2\pi}\right) e^{inx}. \end{aligned}$$

Tarkastellaan tämän luvun lopuksi seuraavaa asetelmaa: Olkoon $\omega > 0$ ja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funktio, jonka tarkastelu rajoitetaan välille $[-\omega, \omega)$. Määritellään siis 2ω -jaksoinen funktio f_ω siten, että $f_\omega(x) = f(x)$, kun $x \in [-\omega, \omega)$, ja muualla f_ω tulee määritellyksi jaksollisuuden perusteella.

Oletetaan vielä lisäksi, että f_ω on riittävän säännöllinen, jotta sillä olisi Fourier-sarja:

$$f_\omega(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi in}{2\omega} x}, \quad (6.21)$$

missä

$$F_n = \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f_\omega(x) e^{-\frac{2\pi in}{2\omega} x} dx. \quad (6.22)$$

Määritellään nyt uusi funktio F_ω seuraavasti:

$$F_\omega(x) = 2\omega F_n, \quad \text{kun } x \in \left[\frac{n}{2\omega}, \frac{n+1}{2\omega}\right),$$

jolloin erityisesti $F_\omega\left(\frac{n}{2\omega}\right) = 2\omega F_n$. Merkitään vielä $\eta_n = \frac{n}{2\omega}$ ja $\Delta y = \frac{n+1}{2\omega} - \frac{n}{2\omega} = \frac{1}{2\omega}$ jolloin (6.22) ja (6.21) voidaan kirjoittaa muotoon

$$F_\omega(\eta_n) = \int_{-\omega}^{\omega} f_\omega(x) e^{-2\pi i\eta_n x} dx \quad (6.23)$$

ja

$$f_\omega(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_\omega(\eta_n) e^{2\pi i\eta_n x} \Delta y. \quad (6.24)$$

Kun ω kasvaa yhä suuremmaksi, tulevat funktion F_ω määrittelevät välit $\left[\frac{n}{2\omega}, \frac{n+1}{2\omega}\right]$ yhä pienemmiksi ja yhtälön (6.24) oikea puoli on Riemann-summa, joka lähestyy integraalia. Jos f on riittävän säännöllinen, on olemassa funktio F , jota F_ω lähestyy, kun ω kasvaa rajatta. Kun siis annetaan luvun ω kasvaa rajatta, saadaan yhtälöistä (6.23) ja (6.24) raja-arvoina

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ixy} dx \quad (6.25)$$

ja

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi ixy} dy. \quad (6.26)$$

Edellä mainittu tarkastelu voidaan täsmentää. Jos funktiolla f on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuspisteitä äärellisillä väleillä ja jos integraali $\int_{-\infty}^{\infty} |f|$ suppenee, niin esitys (6.26) on olemassa ja funktio F toteuttaa yhtälön (6.25) lukuunottamatta mahdollisesti f :n epäjatkuvuuspisteitä. Kaavojen (6.25) ja (6.26) välinen yhteys on Fourier-integraalien perustulos, joka voidaan siis käsittää rajatapauksena Fourier-sarjojen perustuloksesta, jonka puolestaan ilmaisee kaava (5.3).

Huomautus 28 Jos merkitään $T = \frac{1}{2B}$, voidaan Shannonin-Whittakerin interpolaatiokaava voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(x) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_n}{2B} \delta(x - nT) \right) * \frac{1}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{T}\right),$$

millä on konvoluution määritelmän perusteella luonnollinen tulkinta (mikä?).

Luku 7

Diskreetti Fourier-muunnos

Käytännön sovelluksissa signaalia ei voida rekisteröidä mielivaltaisen tiheästi, joten edellisessä luvussa tarkasteltu tilanne on mitä sovelia. Tämän lisäksi on selvää, että myös aika, jolloin signaalia havainnoidaan, on rajoitettu (toisin kuin edellisen luvun tilanteessa). Tilannetta voidaan mallintaa siten, että signaali on *aikarajoitettu*.

Määritelmä 29 Sanotaan, että $f(x)$ on *aikarajoitettu* jos on olemassa sellainen väli $[0, M]$, että $f(x) = 0$, kun $x \notin [0, M]$.

Oletetaan nyt, että signaali on aikarajoitettu välille $[0, M]$, $M = N \cdot \Delta x$ ja että sen arvot (näytteet)

$$f_0 = f(0), f_1 = f(\Delta x), f_2 = f(2\Delta x), f_3 = f(3\Delta x), \dots, f_{N-1} = f((N-1)\Delta x) \quad (7.1)$$

on rekisteröity tasavälisin ajoin. Koska funktio f oletetaan nolllaksi välin $[0, M]$ ulkopuolella, tunnetaan itse asiassa f :n arvot *kaikissa* pisteissä $k\Delta x$, missä $k \in \mathbb{Z}$.

Koska f :n tunnetut arvot ovat Δx :n päässä toisistaan, puuttuu funktion f Δx :ää hienojakoisemman rakenteen tuntemus. Tämä puolestaan merkitsee sitä, että funktion f spektristä, siltä osin kuin funktiota f tunnetaan, puuttuvat taajuudet tietyn rajan B yläpuolelta. Suurin mielekäs raja B voidaan määrittää Nyquistin-Shannonin näytteenottolauseen perusteella: Jos oletetaan, että funktion f spektri on nolla välin $(-B, B)$ ulkopuolella, voidaan aikavälein $\frac{1}{2B}$ otetuista näytteistä selvittää funktio f täydellisesti. Täten $B = \frac{1}{2\Delta x}$ on suurin mielekäs taajuus, jonka alapuolella f :n spektri voi olla nolllasta poikkeava.

Whittakerin-Shannonin interpolaatiokaavan todistus osoittaa, että näytteiden perusteella rakennettu spektri on itse asiassa $2B$ -jaksoinen funktio, josta valitaan ainoastaan väli $[-B, B]$. Yhtä hyvin spektriä tarkasteltaessa voitaisiin välin $[-B, B]$ sijaan valita väli $[0, 2B]$; välin $[-B, 0]$ arvot esiintyvät uudelleen välillä $[B, 2B]$. Valitaan tarkasteluväli $[0, 2B]$ välin $[-B, B]$ sijaan symmetriasyistä: myös signaali on nolllasta poikkeava origosta alkavalla välillä $[0, M]$.

Näytteiden perusteella saadun funktion Fourier-muunnoksen laskemisessa on huomioitava myös Fourier-muunnosten duaalisuusperiaate, jonka mukaan Fourier-muunnoksen Fourier-muunnos antaa alkuperäisen funktion ”peilikuvana”. Tämä kertoo sen, kuinka tihein välimatkoin f :n Fourier-muunnos voidaan ajatella laskettavan: Koska f on nolllasta poikkeava vain välillä $[0, M]$, voidaan välein $\Delta y = \frac{1}{M} = \frac{1}{N\Delta x}$ rekisteröidystä spektristä rekonstruoida spektri uudelleen.

Edellä mainitun perusteella aikavälein Δx rekisteröidylle, välille $[0, M]$ aikarajoitetulle funktiolle f Fourier-muunnos tulisi määrätä välein $\Delta y = \frac{1}{M} = \frac{1}{N\Delta x}$, ja arvot sille voidaan sijoittaa välille $[0, 2B] = [0, \frac{1}{\Delta x}]$. Yleensä valitaan vielä symmetrian vuoksi $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Perusasetelman hahmottelun jälkeen tulee vielä löytää lauseke äärellisin välein laskettavalle Fourier-muunnokselle. Koska funktion f arvot välillä $[0, M]$ tunnetaan vain pisteissä (7.1), saadaan Fourier-muunnoksen määrittelevälle integraalille

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx = \int_0^{N\Delta x} f(x)e^{-2\pi ixy} dx$$

paras mahdollinen approksimaatio Riemann-summalla

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta x) e^{-2\pi i k \Delta x \cdot y} \Delta x,$$

mikä johtaa seuraavaan määritelmään:

Määritelmä 30 Lukujonon $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1}$ diskreetti Fourier-muunnos on jono F_0, F_1, \dots, F_{N-1} , missä

$$F_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{kl}{N}}.$$

Tällöin merkitään

$$(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}) = \text{DFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}).$$

Jos tunnetaan jono F_0, F_1, \dots, F_{N-1} , saadaan alkuperäinen jono f_0, f_1, \dots, f_{N-1} käänteisellä Fourier-muunnoksella:

Määritelmä 31 Lukujonon $F_0, F_1, F_2, \dots, F_{N-1}$ käänteinen diskreetti Fourier-muunnos on jono f_0, f_1, \dots, f_{N-1} , missä

$$f_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2\pi i \frac{kl}{N}}.$$

Tällöin merkitään

$$(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) = \text{DFT}^{-1}(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}).$$

Huomautus 29 Sovelluksissa Fourier-muunnos merkitsee poikkeuksetta nimenomaan diskreettiä Fourier-muunnosta. Rekisteröidystä datasta $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1}$ (N kpl datapisteitä) saadaan diskreetillä Fourier-muunnoksella N (kompleksista) datapistettä $F_0, F_1, F_2, \dots, F_{N-1}$, jotka esittävät funktion f spektriä. Näistä voidaan muodostaa approksimaatio funktion spektrille, mutta tällöin on kuitenkin huomattava, että $F_0, F_1, \dots, F_{N-2}, F_{N-1}$ edustavat matalia taajuuksia, kun taas korkeat taajuudet keskittyvät indeksin arvon $\frac{N}{2}$:n ympärille. Lisäksi on huomattava, että indeksit 0 ja $N-1$, samoin kuin 1 ja $N-2$, jne. edustavat samaa taajuutta.

7.1 Diskreetin Fourier-muunnosten ominaisuuksia

Määritelmä 32 Olkoon $N \in \mathbb{N}$, merkitään $S_N = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Äärellisen joukon k -taajuinen eksponenttifunktio $e_k : S_N \rightarrow \mathbb{C}$ määritellään

$$e_k(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{kl}{N}}.$$

Perinteisen (jatkuvan) Fourier-analyysin kantavana ideana on esittää (riittävän säännölliset) funktiot $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier'n integraalina

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi i xy} dy,$$

jolloin esityksen rakentavina perusfunktioina toimivat y -taajuiset eksponenttifunktiot $x \rightarrow e^{2\pi i xy}$. Diskreetissä Fourier-analyysissä puolestaan tarkastellaan joukossa $S_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ määriteltyjä

kompleksi-arvoisia funktiota, ja kantavana ideana on esittää tällaiset funktiot k -taajuisten äärellisen joukon eksponenttifunktioiden avulla äärellisinä summina määritelmän (31) mukaisesti.

Huomautus 30 Diskreetin Fourier-muunnoksen perusasetelmaa haettaessa siirrettiin spektri väliltä $[-B, B]$ välille $[0, 2B]$ symmetrian vuoksi. Tällöin jaksollisuuden vuoksi väli $[-B, 0]$ siirtyi väliksi $[B, 2B]$, mikä merkitsee sitä, että korkeat taajuudet ovat pisteen B ympäristössä, kun taas matalia taajuuksia edustavat pisteiden 0 ja $2B$ lähistöt. Joukossa S_N siis korkeita taajuuksia edustaa pisteen $\frac{N}{2}$ ympäristö. On huomattava, että jos $k \in \mathbb{Z}$, niin

$$e_{N-k}(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{(N-k)l}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i l} e^{2\pi i \frac{-kl}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{-kl}{N}} = e_{-k}(l),$$

mikä on sopusoinnussa edellä mainitun kanssa: $e_0 = e_N$, $e_{-1} = e_{N-1}$, $e_{-2} = e_{N-2}$, jne. Antamalla k :lle negatiivisia arvoja nähdään että $e_{N+1} = e_1$, $e_{N+2} = e_2$, jne., mikä merkitsee sitä, että eksponenttifunktioiden indeksi käyttäytyy jaksollisesti. Koska äärellisen joukon eksponenttifunktiot ovat symmetrisiä indeksinsä ja argumenttinsa suhteen, on tietysti kokonaislukuarvoille l myös

$$e_k(l + N) = e_k(l),$$

siis funktiot ovat N -jaksollisia.

Seuraavaksi osoitetaan, että diskreetti ja käänteinen diskreetti Fourier-muunnos ovat todella toistensa käänteisoperaatioita. Tätä varten todistetaan ensin apulos.

Lause 42

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i k l}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{N} e_l(k) = \begin{cases} 0, & \text{jos } l \in \{1, 2, \dots, N-1\} \\ N, & \text{jos } l = 0. \end{cases}$$

Todistus Jos $l = 0$, on summassa N kappaletta ykkösiä ja väite sitä myöten selvä. Jos taas $l \neq 0$, on

$$e^{\frac{2\pi i l}{N}} S = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i l}{N}} e^{\frac{2\pi i k l}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i l(k+1)}{N}} = \sqrt{N} \sum_{k=0}^{N-1} e_l(k+1) = S.$$

Viimeisin yhtäsuuruus pätee funktion e_l jaksollisuuden perusteella. Tästä seuraa, että $S = 0$, koska $e^{\frac{2\pi i l}{N}} \neq 1$. \square

Lause 43 $\text{DFT}^{-1} \text{DFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) = \text{DFT} \text{DFT}^{-1}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$.

Todistus Olkoon $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}) = \text{DFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ ja lasketaan $g_k = (\text{DFT}^{-1}(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}))_k$. Todistus muunnosten toisella järjestyksellä on samanlainen.

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} F_l e^{\frac{2\pi i k l}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-\frac{2\pi i m l}{N}} \right) e^{\frac{2\pi i k l}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i l(k-m)}{N}} = f_k. \quad \square$$

Esimerkki 57 Määritellään ns. *diskreetti deltafunktio* $\delta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ seuraavasti:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{jos } k = 0, \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Jos $f \in \mathbb{Z}$, niin funktion $\delta(k - f)$ käänteinen diskreetti Fourier-muunnos on

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \delta(k - f) e^{2\pi i \frac{k l}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i \frac{f l}{N}} = e_f(l),$$

siis f -taajuisen äärellisen joukon eksponenttifunktion (diskreettinä) spektrinä toimii $\delta(k - f)$. Tämä on varsin hyvin sopusoinnussa aiemman teorian kanssa, jonka mukaan f -taajuisen eksponenttifunktion $e^{2\pi i f x}$ spektrinä toimii Diracin δ -funktio $\delta(y - f)$. Diskreetti deltafunktio olisi yhtä hyvin voitu määrittellä joukossa $\{0, 1, \dots, N\}$ joukon \mathbb{Z} sijaan.

Huomautus 31 Edellinen lause osoittaa, että diskreetti Fourier-muunnos ja sen käänteismuunnos ovat todella toistensa käänteisoperaatioita. Koska kumpainenkin on Riemann-summa -approksimaatio vastaavasta jatkuvasta muunnoksesta, voidaan myös tällä tavoin perustella Fourier-analyysin perustulos (Lause 29). Yksityiskohtia tarvittavasta perustelusta ei kuitenkaan esitetä tällä kurssilla.

7.2 FFT (Fast Fourier Transform)

Diskreetin Fourier-muunnoksen laskeminen merkitsee sitä, että annetusta syötteestä (lukujonosta, jota voidaan kutsua myös N -ulotteiseksi vektoriksi)

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1} \quad (7.2)$$

tuotetaan lukujono (N -ulotteinen vektori)

$$F_0, F_1, F_2, \dots, F_{N-1} \quad (7.3)$$

määritelmän 30 mukaisella tavalla. Tämä kuitenkin edellyttää N :ää kertolaskua ja yhteenlaskua kutakin arvoa F_k kohti, jolloin jonon (7.3) tuottamiseksi jonosta (7.2) tarvitaan ainakin $2N^2$ aritmeettista laskutoimitusta, eikä tällöin ole vielä otettu huomioon eksponenttifunktion arvojen laskemiseksi tarvittavia operaatioita.

Jo yksinkertaisissa kuvien pakkaamiseen liittyvissä sovelluksissa N on kuitenkin suuruusluokkaa $10^6 - 10^7$, jolloin operaatioiden määrä $2N^2$ kasvaa liian suureksi verrattuna käytössä olevaan laskentakapasiteettiin, jonka tulee usein tilan säästämiseksi olla minimiin supistettu.

Diskreetin Fourier-muunnoksen nopeammaksi laskemiseksi voidaan hyödyntää algoritmien suunnittelusta tuttua *hajota ja hallitse* -tekniikkaa, jossa ratkaistava ongelma hajotetaan osiksi, kullekin osalle muodostetaan osaratkaisunsa, ja lopuksi osat yhdistetään. Joillekin ongelmille tämä tapa on suoraviivaista ratkaisua tehokkaampi.

Jotta diskreetin Fourier-muunnoksen ”hajottaminen osiin” onnistuisi toistuvasti, oletetaan, että $N = 2^r$ on kakkosen potenssi. Käytännön sovelluksissa tämä onnistuu aina, sillä tarpeen vaatiessa voidaan rekisteröityyn dataan lisätä nollia kunnes datapisteiden määrä saavuttaa lähimmän kakkosen potenssin.

Hajottamisen idea perustuu siihen, että diskreetin Fourier-muunnoksen määrittelevässä summassa erotetaan toisistaan parilliset ($k = 2m$) ja parittomat ($k = 2m + 1$) indeksin arvot kahdeksi eri summaksi:

$$\begin{aligned} F_l &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{k-l}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} e^{-2\pi i \frac{2m-l}{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} e^{-2\pi i \frac{(2m+1)-l}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} e^{-2\pi i \frac{m-l}{N/2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \frac{l}{N}} \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} e^{-2\pi i \frac{m-l}{N/2}} \end{aligned}$$

Täten siis N -pituisen datan Fourier-muunnos saadaan yhdistämällä kaksi $N/2$ -pituisen datan Fourier-muunnosta. Menetelmä voidaan kiteyttää seuraavaksi algoritmiksi:

Fast Fourier Transform (FFT)

- Syöte: Vektori $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1})$
- Tuloste: Syötteen diskreetti Fourier-muunnos $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}) = \text{FFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$.
- Jos $N = 1$, tulosta f_0 ja pysähdy.
- Jos $N > 1$, laske $(G_0, G_1, \dots, G_{N/2-1}) = \text{FFT}(f_0, f_2, \dots, f_{N-2})$ ja $(H_0, H_1, \dots, H_{N/2-1}) = \text{FFT}(f_1, f_3, \dots, f_{N-1})$.
- Jokaista $l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ kohti laske $F_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_l + e^{-2\pi i \frac{l}{N}} H_l)$. Luvun $N/2 - 1$ ylittävälle l :n arvoille tulkitaan $G_l = G_{l-N/2}$ ja $H_l = H_{l-N/2}$.
- Tulosta $(F_0, F_1, \dots, F_{N-1}) = \text{FFT}(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$.

Huomautus 32 Koska $e^{-2\pi i \frac{l}{N}} = e^{-\frac{2\pi i}{N}} e^{-2\pi i \frac{l-1}{N}}$, voidaan askeleessa 3 tarvittava eksponenttifunktion arvo laskea edellisestä arvosta yhdellä kertolaskulla. Lisäksi kerroin $\frac{1}{\sqrt{2}}$ voidaan jättää pois algoritmista ja vasta lopuksi kertoa saatu jono luvulla $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Joissakin sovelluksissa tämä kerroin voidaan jättää kokonaan pois, varsinkin mikäli Fourier-muunnoksen absoluuttinen suuruusluokka ei ole tärkeä.

Algoritmin FFT tarvitsemien operaatioiden määrää voidaan arvioida varsin suoraviivaisesti: N -pituisen jonon Fourier-muunnoksen tarvitaan kaksi $N/2$ -pituisen jonon Fourier-muunnosta sekä niiden yhdistämiseen tarvittavat operaatiot, jotka ovat: yksi yhteenlasku ja kolme kertolaskua kutakin jono jäsentä varten, siis korkeintaan $4N$ yhteen- tai kertolaskua.

Merkitään nyt $T(N)$:llä $N = 2^r$ -pituisen Fourier-muunnoksen laskemiseksi riittävien aritmeettisten operaatioiden määrää. Tällöin

$$\begin{aligned} T(N) &= 2 \cdot T(N/2) + 4N = 2 \cdot (2T(N/4) + 4 \cdot N/2) + 4N \\ &= 4T(N/4) + 2 \cdot 4N = 4(2T(N/8) + 4 \cdot N/4) + 2 \cdot 4N \\ &= 8T(N/8) + 3 \cdot 4N = 8(2T(N/16) + 4 \cdot N/8) + 3 \cdot 4N \\ &= 16T(N/16) + 4 \cdot 4N = \dots \\ &= 2^r T(N/2^r) + r \cdot 4N = NT(1) + r \cdot 4N = 4N \log_2 N, \end{aligned}$$

mikä on suurilla N :n arvoilla huomattavasti parempi kuin suoraviivaisen menetelmän antama $2N^2$. Itse asiassa juuri FFT:tä on kiittäminen käytännössä toimivista sovelluksista. James W. Cooleyn ja John Tukeyn vuodelta 1965 peräisin oleva esitys FFT:lle lienee kaikkein tunnetuin, mutta varhaisin FFT lienee Carl Friedrich Gaussin 1800-luvun alussa esittämä.

Matlabiin ohjelmoitu `fft` laskee annetuista datapisteistä määritelmän 30 mukaisen diskreetin Fourier-muunnoksen *ilman* kerrointa $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ja käänteinen operaatio `ifft` laskee määritelmän 31 mukaisen käänteisen Fourier-muunnoksen, jossa kertoimen $\frac{1}{\sqrt{N}}$ sijasta on kerroin $\frac{1}{N}$. Täten tällä kurssilla esitetty diskreetti fourier-muunnos saadaan lisäämällä kerroin $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

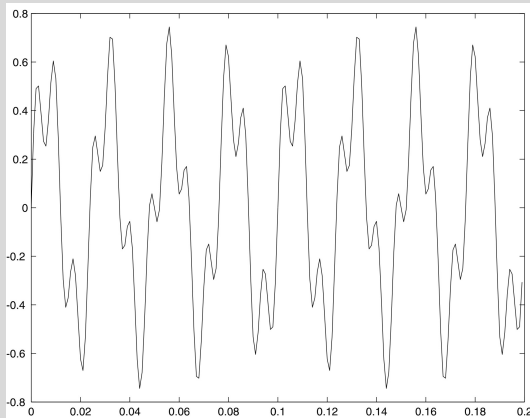
Tarkastellaan esimerkiksi kahdesta taajuudesta, 40 ja 130 koostuvaa signaalia $s(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 40t) + \frac{1}{4} \sin(2\pi \cdot 130t)$ välillä $t \in [0, 1]$:

```
>> t=0:0.001:1;
```

```
>> s=(1/2)*sin(2*pi*40*t)+(1/4)*sin(2*pi*130*t);
```

Signaalin alkuosa saadaan piirrettyä seuraavasti:

```
>> plot(t(1:200),s(1:200))
```

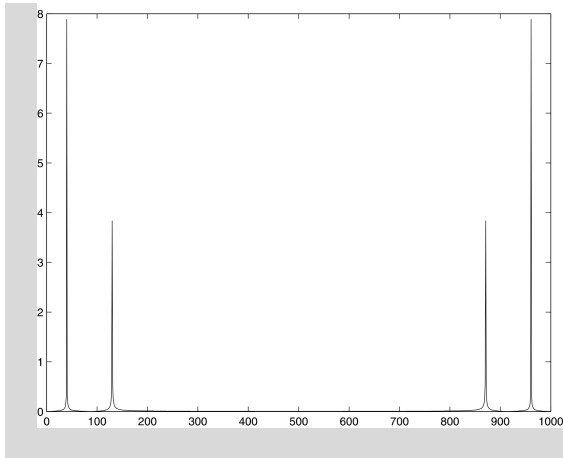


Lasketaan signaalille (1001 datapistettä) diskreetti Fourier-muunnos ja sen itseisarvo (amplitudispektri):

```
>> S=(1001)^(-1/2)*fft(s);
```

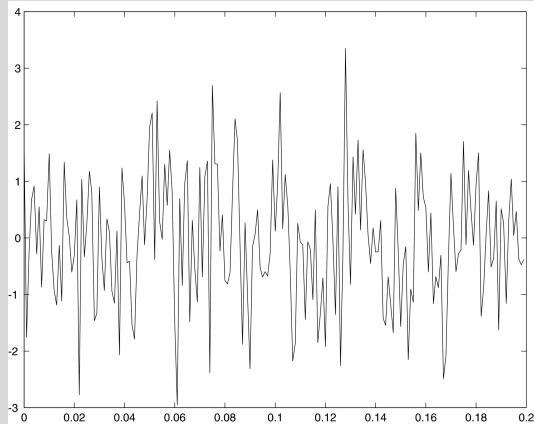
```
>> AbsS=abs(S);
```

```
>> plot(1000*t,AbsS)
```



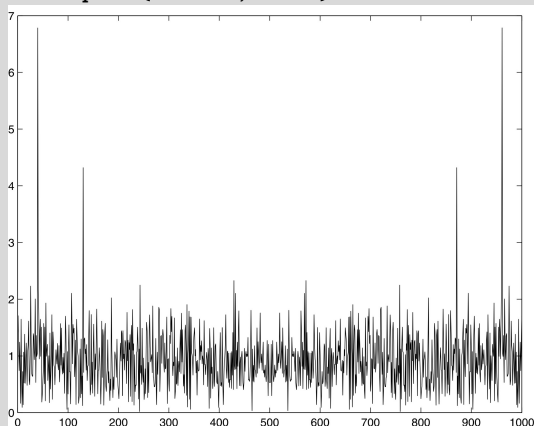
Fourier-muunnokset tarjoavat keinon erottaa signaali kohinasta. Lisätään edellisen esimerkin signaaliin satunnaiskohinaa ja tarkastellaan näin muokatun funktion Fourier-muunnosta:

```
>> s1=s+randn(size(t));
>> plot(t(1:200),s1(1:200));
```



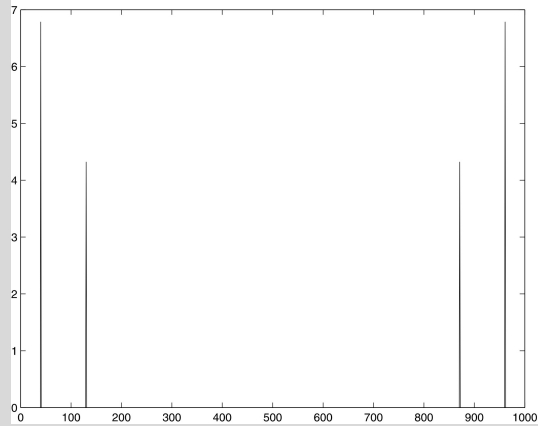
Tämän amplitudispektri puolestaan saadaan piirrettyä seuraavasti:

```
>> S1=(1001)^(-1/2)*fft(s1);
>> AbsS1=abs(S1);
>> plot(1000*t,AbsS1)
```

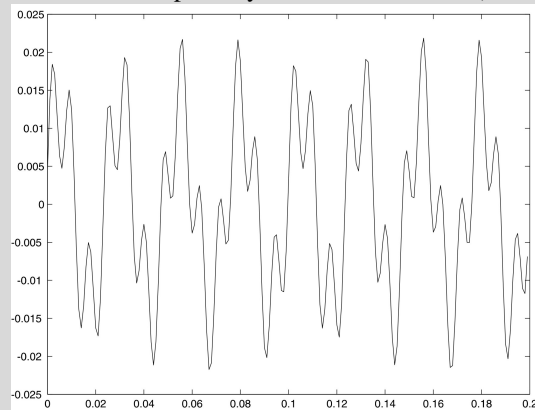


Havaitaan siis, että satunnaisignaalin häiritsemässä signaalissa on yhä alkuperäisen signaalin spektriviivat selvästi näkyvissä. Jos satunnaisignaalin häirityn signaalin spektristä poiste-

taan kaikki itseisarvoltaan pienet taajuudet, saadaan seuraavanlainen ”puhdistettu” spektrikuvio:



Puhdistetusta spektrikuvioista saadaan käänteisellä Fourier-muunnoksella korjattu signaali, joka tosin poikkeaa alkuperäisestä, mutta on silti paljon lähempänä alkuperäistä kuin häiritty signaali (vain reaaliosa on piirretty allaolevaan kuvioon):



Mitä pidempi näyte signaalista on saatavilla, sen paremmin häiriö saadaan puhdistettua jaksollisesta signaalista.

Luku 8

Laplace-muunnokset

Fourier-analyysin perusidea, siis funktion $f(x)$ esittäminen y -taajuisten eksponenttifunktioiden avulla Fourier'n integraalina

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{2\pi ixy} dy \quad (8.1)$$

on erityisen käyttökelpoinen derivaattojen yhteydessä, sillä eksponenttifunktioiden derivointi on yksinkertaista:

$$\frac{d}{dx} e^{2\pi ixy} = 2\pi iy e^{2\pi ixy}.$$

Tämä näkyy Fourier-muunnoksissa derivointia koskevassa lauseessa (Lause 35) siten, että funktion derivointi aiheuttaa Fourier-muunnokseen kertolaskun:

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](y) = (2\pi iy)^n F(y). \quad (8.2)$$

Yhtälö (8.2) puolestaan on käyttökelpoinen muotoa

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = g(x) \quad (8.3)$$

olevien differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen etsimisessä, sillä yhtälön (8.3) Fourier-muunnos on muotoa

$$a_n (2\pi iy)^n F(y) + a_{n-1} (2\pi iy)^{n-1} F(y) + \dots + a_1 (2\pi iy) F(y) + a_0 F(y) = G(y), \quad (8.4)$$

missä on merkitty $F(y) = \mathcal{F}[f(x)](y)$ ja $G(y) = \mathcal{F}[g(x)](y)$. Tällöin yhtälöstä (8.4) voidaan ratkaista $F(y)$, mistä puolestaan saadaan kysytty funktio $f(x)$ Fourier'n integraalina (8.1).

Edellä kuvattu menettelytapa differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi tuottaa käytännössä kuitenkin usein ongelmia, sillä monilla tärkeillä funktioilla, kuten eksponenttifunktioilla ja trigonometrisilla funktioilla ei ole olemassa Fourier-muunnosta tavallisena funktiona, vaan sellainen on esitettävä Diracin δ -funktion avulla.

Laplace-muunnokset korjaavat tämän ongelman melko tehokkaasti: useimmilla sovelluksissa esiintyvillä funktioilla on Laplace-muunnos, joka on toinen tällä kurssilla käsiteltävä *integraalimuunnos*. Sovellusten tarpeisiin on kehitetty lukuisa joukko muita integraalimuunnoksia, kuten esimerkiksi Mellin-muunnos ja Hilbert-muunnos.

Laplace-muunnokset ovat tärkeä työkalu erityisesti piiritekniikkaan liittyvien integraali- ja differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa.

Taustatietoa



Pierre-Simon Laplace (1749–1827) oli ranskalainen matemaatikko ja tähtitieteilijä. Laplacen tärkeimpiin saavutuksiin luetaan taivaanmekaniikan kehittämistyö, lämmönjohtumisyhtälön esittäminen, Laplace-muunnosten perusteet ja hypoteesi mustien aukkojen olemassaolosta.

(kuva: Wikimedia Commons)

8.1 Määritelmä ja perusominaisuuksia

Määritelmä 33 Olkoon $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolla on jokaisella äärellisellä välillä korkeintaan äärellisen monta epäjatkuvuuspistettä. Jos integraali

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (8.5)$$

suppenee itseisesti joillakin s :n arvoilla, sanotaan integraalia (8.5) funktion f Laplace-muunnokseksi ja merkitään $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ tai lyhyemmin $F = \mathcal{L}[f]$. Tällöin funktiota f kutsutaan *originaalifunktioksi* ja funktiota F *kuva-funktioksi*.

Esimerkki 58 Osoitetaan, että $f(t) = e^{\lambda t}$ on originaalifunktio. Jos $s > \lambda$, on

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}](s) = \int_0^{\infty} e^{\lambda t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(\lambda-s)t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda-s} e^{(\lambda-s)t} dt = \frac{1}{s-\lambda}.$$

Seuraus 3 Sijoittamalla edelliseen esimerkkiin $\lambda = 0$ saadaan vakiofunktio $f(t) = 1$ ja sen Laplace-muunnos: $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$, kun $s > 0$.

Esimerkki 59 Olkoon $r > 0$ ja osoitetaan, että $f(t) = t^r$ on originaalifunktio. Sijoitetaan tätä varten integraaliin

$$\int_0^M t^r e^{-st} dt$$

$t = \frac{u}{s}$, jolloin saadaan

$$\int_0^{Ms} \left(\frac{u}{s}\right)^r e^{-u} \frac{1}{s} du = \frac{1}{s^{r+1}} \int_0^{Ms} u^{r+1-1} e^{-u} du.$$

Antamalla luvun M lähestyä ääretöntä todetaan, että

$$\mathcal{L}[t^r](s) = \int_0^{\infty} t^r e^{-st} dt = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}.$$

Laplace-muunnoksen perusominaisuudet voidaan johtaa (epäoleellisten) integraalien ominaisuuksista aivan samoin kuin Fourier-muunnostenkin vastaavat ominaisuudet, eikä niitä tässä yhteydessä erikseen todisteta.

Lause 44 (Linearisuus) Jos f ja g ovat originaalifunktiota ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin myös $af + bg$ on originaalifunktio ja $\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$.

Lause 45 (Muuttujan skaalaus) Jos f on originaalifunktio, $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ ja $a > 0$, niin $\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$.

Lause 46 (Kertominen eksponenttifunktiolla) Jos $f(t)$ on originaalifunktio, niin myös $e^{at}f(t)$ on, ja

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s - a).$$

Lause 47 (Kuvafunktion derivointi) Jos $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, ja Laplace-muunnoksissa tarvittavat integraalit ovat olemassa, niin

$$F'(s) = -\mathcal{L}[tf(t)](s).$$

Lause 48 (Originaalifunktion derivointi)

Olkoon f derivoituva originaalifunktio ja oletetaan, että funktiolla $f'(t)$ on jokaisella äärellisellä välillä vain äärellisen monta epäjatkuvuuskohtaa. Tällöin myös $f'(t)$ on originaalifunktio ja

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0+),$$

missä $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$.

Edellisestä lauseesta saadaan induktiolla seuraava yleistys: Jos funktiolla $f^{(n)}$ on Laplace-muunnos, niin

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+).$$

Lause 49 (Originaalifunktion integrointi) Oletetaan että f on originaalifunktio. Tällöin integraalifunktio

$$g(t) = \int_0^t f(u) du$$

on originaalifunktio ja

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s).$$

8.2 Laplace-muunnosten olemassaolosta

Yleisesti ottaen voidaan todeta, että s :n positiivisilla arvoilla integraalissa

$$F(s) = \int_0^\infty |f(t)| e^{-st} dt, \quad (8.6)$$

eksponenttifunktio $e^{-st} = \frac{1}{e^{st}}$ lähestyy nollaa hyvin nopeasti, mikä edesauttaa integraalin (8.6) suppene-
mista.

Lisäksi niiden pisteiden s joukko, joille (8.6) suppenee, on varsin yksinkertainen: Jos nimittäin inte-
graali (8.6) suppenee jollakin arvolla $s = s_1$, niin mille hyvänsä arvolle $s_2 > s_1$ pätee

$$|f(t)| e^{-s_2 t} < |f(t)| e^{-s_1 t}$$

joten siis myös integraali

$$\int_0^\infty |f(t)| e^{-s_2 t} dt$$

suppenee. Tämä merkitsee sitä, että jos Laplace-muunnoksen määrittelemä integraali (8.5) suppenee itse-
sesti jollakin arvolla s_1 , suppenee se itseisesti myös koko puolisuoralla $[s_1, \infty)$. Tällöin suppenemisalueen
(ja siis Laplace-muunnoksen määrittelyjoukon) selvittämiseksi pitää enää löytää pienin mahdollinen s_1 ,
jolla integraali (8.5) suppenee itseisesti.

Määritelmä 34 Olkoon $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolla on jokaisella äärellisellä välillä korkeintaan äärellisen monta epäjatkuvuuspistettä. Jos on olemassa sellainen luku s , että integraali

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-st} dt \quad (8.7)$$

suppenee, määritellään $s_0 = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-st} dt \text{ suppenee}\}$ ja sanotaan, että s_0 on *Laplacen integraalin*

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

itseisen suppenemisen abskissa tai funktion $f(t)$ *kasvueksponentti*. Jos integraali (8.7) suppenee kaikilla reaaliluvuilla s , määritellään $s_0 = -\infty$.

Tarkastellaan sitten sitä kysymystä, minkälaisille funktioille kasvueksponentin olemassaolo voidaan taata, toisin sanoen siis minkälaisille funktioille Laplace-muunnos on määritelty (*jollakin* välillä (s_0, ∞)). Edelleen eri tavalla ilmaistuna: tarkastellaan, mitkä funktiot ovat originaalifunktiota.

Aiemmin havaittiin, että positiivisilla s :n arvoilla Laplace-muunnoksen määritelmässä esiintyvä voimakkaasti kohti nollaa lähestyvä funktio $t \mapsto e^{-st}$, mikä edesauttaa integraalin (8.7) suppenemista. Jos (8.7) ei suppene, kasvaa f siis varsin voimakkaasti. Palautetaan mieleen eräs tärkeä Insinöörimatematiikka B:n käsite:

Määritelmä 35 Funktio $|f(t)|$ kasvaa hitaammin kuin e^{at} , jos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} = 0.$$

Jos on olemassa sellainen $a > 0$, että $|f(t)|$ kasvaa hitaammin kuin e^{at} , sanotaan, että $|f(t)|$:n kasvu on (*korkeintaan*) *eksponentiaalinen*.

Jos funktio $|f(t)|$ kasvaa hitaammin, kuin e^{at} , tulee

$$\frac{|f(t)|}{e^{at}}$$

miten pieneksi hyvänsä, kunhan t valitaan riittävän suureksi. Erityisesti on siis olemassa sellainen rajaluku M_1 , että ylläoleva lauseke tulee pienemmäksi kuin 1, kunhan $t \geq M_1$. Tällöin $|f(t)| \leq e^{at}$, kunhan $t \geq M_1$ ja siis

$$|f(t)e^{-st}| \leq e^{at} e^{-st} = e^{(a-s)t}.$$

Arvoilla $s > a$ todetaan, että

$$\int_{M_1}^{\infty} e^{-(s-a)t} dt$$

suppenee, jolloin myös siis

$$\int_{M_1}^{\infty} |f(t)| e^{-st} dt$$

suppenee. Tämä ei kuitenkaan vielä yksin riitä takaamaan Laplace-muunnoksen olemassaoloa. Lisäksi on vielä tarkasteltava väliä $[0, M_1]$. Jos myös integraali

$$\int_0^{M_1} |f(t)| e^{-st} dt$$

on olemassa (esimerkiksi välillä $[0, M_1]$ jatkuville funktioille näin on), on funktiolla f olemassa Laplace-muunnos ja siis f on originaalifunktio. Johtopäätöksenä voidaan todeta, että joukossa $[0, \infty)$ jatkuvilla funktiolla, joiden kasvu on korkeintaan eksponentiaalista, on olemassa Laplace-muunnos. Tällaiset funktiot kattavat suurimman osan käytännön sovelluksissa esiintyvistä funktioista.

8.3 Konvoluutio ja deltafunktio

Laplace-muunnoksille pitää määritellä oma konvoluutiokäsitteensä, joka toteuttaa samankaltaisen multiplikatiivisuusehdon kuin Fourier-muunnosten konvoluutio. Konvoluution erilainen muoto johtuu siitä, että Laplace-muunnokset määritellään vain yhteen suuntaan äärettömällä integraalilla.

Määritelmä 36 Funktioiden f ja g konvoluutio $f * g$ määritellään kaavalla

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$$

Huomautus 33 Katkaisemalla funktiot positiiviselle reaaliakselille Heavisiden funktion avulla voidaan yllämainittu konvoluutio kirjoittaa muotoon

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)H(u)g(t-u)H(t-u) du,$$

joka on sama kuin Fourier-muunnoksille määritelty konvoluutio.

Esimerkki 60

$$\begin{aligned} (\sin * \cos)(t) &= \int_0^t \sin(u) \cos(t-u) du = \int_0^t \left(\frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \sin(2u-t)\right) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \sin t du + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(2u-t) du = \frac{1}{2} t \sin t. \end{aligned}$$

Konvoluution merkitys Laplace-muunnoksille on samanlainen kuin Fourier-muunnoksille:

Lause 50 Jos f ja g ovat originaalifunktioita, niin

1. $f * g = g * f$,
2. $f * (g * h) = (f * g) * h$,
3. $f * (ah + bg) = af * h + bf * g$, ja
4. $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$.

Todistus Sivutetaan toistaiseksi. □

Myös Diracin δ -funktiota tarvitaan toisinaan Laplace-muunnosten yhteydessä. Delta-funktion määrittelevän integraalin (6.14) ja Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan δ -funktion Laplace-muunnos tulee laskea seuraavasti:

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)](s) = \int_0^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-st} dt = e^{-st_0}.$$

8.4 Laplace-muunnoksen yhteys Fourier-muunnokseen, inversiokaava

Jos luvun alussa kuvattua menetelmää halutaan käyttää differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen käytännössä, pitää kuvafunktiosta voida päätellä originaalifunktio. Fourier-muunnosten yhteydessä käänteismuunnoksen olemassaolo ja löytäminen on tietystä mielessä suoraviivaisempaa: Koska Fourier-muunnoksen ja sen käänteismuunnoksen välillä on varsin hyvä symmetria, ei käänteismuunnoksen etsiminen ole oleellisesti vaikeampaa kuin itse muunnoksenkaan. Laplace-muunnosten kohdalla on kuitenkin toisin: Laplace-muunnoksen etsiminen useissa käytännössä esiintyvissä tapauksissa on oleellisesti helpompaa kuin käänteismuunnoksen määrittäminen.

Käänteismuunnoksen ongelma on silti varsin luonnollinen: Voidaanko Laplace-muunnoksesta

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

päätellä alkuperäinen funktio $f(t)$ ja jos voidaan, miten se käytännössä tapahtuu? Kun muistetaan, että integraalin

$$\int_0^M f(t)e^{-st} dt$$

arvo ei muutu, mikäli integrandin $f(t)e^{-st}$ arvoa muutetaan äärellisen monessa pisteessä, huomataan, että kahdella eri funktiolla voi olla sama Laplace-muunnos: Jos nimittäin f_1 saadaan funktiosta f muuttamalla sen arvoa äärellisessä määrässä pisteitä, on $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[f_1]$ ja siksi alkuperäistä funktiosta ei voi saada esille Laplace-muunnoksesta.

On kuitenkin huomattava, että jos funktio f_1 saadaan funktiosta f muuttamalla arvoa äärellisen monessa pisteessä, on välttämättä toinen funktioista f_1 ja f epäjatkuva (äärellisen monessa pisteessä). Seuraavaksi esitetäänkin kysymys, voidaanko Laplace-muunnoksesta $F(s)$ päätellä alkuperäinen funktio $f(t)$ jos tämä oli *jatkuva*. Tässäkin yhteydessä ajaudutaan umpikujaan, sillä määritelmän mukaan Laplace-muunnos riippuu vain funktion arvoista *positiivisella* reaaliakselilla. Funktion f arvoja voidaan negatiivisella reaaliakselilla siis muuttaa millä tahansa tavalla, ja näin saadulla funktiolla f_1 on edelleen sama Laplace-muunnos kuin alkuperäiselläkin funktiolla f .

Rajoitetaan siis edelleen tarkasteltavia funktioita ja kysytään seuraavaksi, voidaanko alkuperäisen funktion $f(t)$ arvot *positiivisella reaaliakselilla* päätellä Laplace-muunnoksesta $F(s)$, jos tiedetään, että $f(t)$ on jatkuva positiivisella reaaliakselilla. Tällöin kysymykseen saadaan lopulta positiivinen vastaus:

Lause 51 *Olko f_1 ja f_2 välillä $[0, \infty)$ jatkuvia funktioita. Jos $\mathcal{L}[f_1] = \mathcal{L}[f_2]$, niin $f_1(t) = f_2(t)$ kun $t \in [0, \infty)$.*

Todistus Vaatii esitietoja, joita ei kurssilla ole esitetty, sivuutetaan. □

Edellinen lause siis merkitsee sitä, että tarkasteltaessa positiivisella reaaliakselilla jatkuvia funktioita yhteys originaalifunktion ja kuvafunktion (Laplace-muunnoksen) välillä on yksikäsitteinen: Jos f on jatkuva (positiivisella reaaliakselilla), voidaan Laplace-muunnoksesta $\mathcal{L}[f]$ ainakin teoriassa päätellä alkuperäinen f (positiivisella reaaliakselilla).

Sen sijaan ei ole mitään takeita, että mielivaltaisesti valittu funktio $F(s)$ olisi minkään funktion Laplace-muunnos. Fourier-muunnoksen olemassaolohan pystyttiin takaamaan vain sillä oletuksella, että funktiot lähenivät nollaa riittävän nopeasti, kun $x \rightarrow \pm\infty$, ja itse asiassa voidaan osoittaa näin tapahtuvan myös spektrille, mikäli Fourier'n integraali suppenee itseisesti. Laplace-muunnoksen olemassaololle ei kuitenkaan ole välttämätöntä, että funktio olisi nopeasti nollaa lähestyvä, vaan itse asiassa varsin voimakkaastikin kasvavilla funktioilla on Laplace-muunnos. Sen sijaan kuvafunktiolla on vastaava ominaisuus.

Lause 52 *Jos $F(s)$ on kuvafunktio, niin $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$.*

Todistus Sivuuetaan. □

Edellisen lauseen tulos ilmaisee sen, että mikäli funktion $F(s)$ raja-arvo äärettömyydessä ei ole nolla, ei $F(s)$ ole minkään funktion $f(t)$ kuvafunktio ja siksi ei myöskään ole mielekäästä yrittää löytää $F(s)$:lle originaalifunktiota. Jos sitten tarkastelu rajoitetaan sellaisiin funktioihin, jotka lähestyvät nollaa s :n läheisyydessä ääretöntä, on tilanne toinen ja apuna voidaan käyttää käänteistä Fourier-muunnosta.

Olkoon nyt $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ ja lasketaan

$$\begin{aligned} F(x + 2\pi iy) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(x+i2\pi y)t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-xt} e^{-2\pi iy t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)H(t)e^{-xt} e^{-2\pi iy t} dt, \end{aligned}$$

missä H on Heavisiden askelfunktio. Täten siis funktion $f(t)e^{-xt}H(t)$ Fourier-muunnos on $F(x + 2\pi iy)$, jolloin $f(t)e^{-xt}H(t)$ voidaan esittää Fourier'n integraalina

$$f(t)H(t)e^{-xt} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x + 2\pi iy)e^{2\pi ity} dy.$$

Kertolaskulla saadaan

$$f(t)H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x + 2\pi iy)e^{(x+2\pi iy)t} dy.$$

Kun tähän vielä sijoitetaan $s = x + 2\pi iy$, voidaan integraali kirjoittaa muotoon

$$f(t)H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s)e^{st} ds$$

Arvoilla $t > 0$ on $H(t) = 1$ ja siis saadaan seuraava kaava.

Lause 53 (Laplace-muunnoksen inversiokaava) Olkoon $F = \mathcal{L}[f]$. Tällöin

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s)e^{st} ds,$$

kun $t > 0$ ja x suurempi kuin funktion f kasvukseen.

Huomautus 34 Inversiokaavassa esiintyvä integraali tunnetaan nimellä *Bromwichin integraali*. Inversiokaava ei anna funktion f arvoja alueella $t < 0$. Tämä on väistämätöntä, koska Laplace-muunnos ei näistä arvoista riipu. Lisäksi inversiokaavassa esiintyvä x voidaan valita vapaasti, kunhan se ylittää funktion f kasvukseen.

Huomautus 35 Laplace-muunnosten inversiokaava selvittää ainakin osittain sen, minkälaiset funktiot $F(s)$ ovat jonkin originaalifunktion $f(t)$ kuvafunktioita. Ehdot ovat 1) Integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x + iy)| dy$$

suppenee, 2) $F(s) \rightarrow 0$, kun $|s| \rightarrow \infty$, edellyttäen, että s :n reaaliosa pysyy riittävän suurena. Mikäli nämä ehdot toteutuvat, F :n originaalifunktio löytyy inversiokaavaa käyttäen (yksityiskohdat sivuutetaan).

Myös Laplace-muunnoksen kääntämiselle on oma merkintänsä:

Määritelmä 37 Jos $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ on funktion f Laplace-muunnos, kutsutaan funktiota f funktion F käänteiseksi Laplace-muunnokseksi ja merkitään

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$$

Laplace-muunnoksen inversiokaava antaa teoreettisen mahdollisuuden käänteismuunnoksen \mathcal{L}^{-1} laskemiseksi, mutta käytännössä inversiokaavaan perustuva käänteismuunnoksen laskeminen on huomattavasti hankalampaa kuin taulukoihin perustuva menetelmä, johon tutustutaan seuraavaksi.

8.5 Laplace-muunnoksen kääntäminen käytännössä

8.5.1 Laplace-muunnospareja

Käytännössä Laplace-muunnoksen kääntäminen voidaan usein suorittaa originaalifunktio-kuvafunktio-taulukoihin perustuen. Tällöin on pyrittävä esittämään kuvafunktio taulukossa esiintyvässä muodossa.

Seuraavaan taulukkoon on laskettu Laplace-muunnospareja suoraan määritelmään perustuen. Taulukossa on merkitty $\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ (vastaavasti funktion $g(t)$ Laplace-muunnoksesta on käytetty merkintää $G(s)$) ja $(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$ (konvoluutio), $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$, ja $\gamma = -\int_0^{\infty} \ln t e^{-t} dt = 0,577215665 \dots$ (Eulerin vakio).

	Funktio	Laplace-muunnos
1	$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
2	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
3	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
4	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - f(0+)s^{n-1} - f'(0+)s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(0+)$
5	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
6	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(q) dq$
7	$\int_0^t f(u) du$	$\frac{F(s)}{s}$
8	$f(t - \tau)$	$e^{-s\tau} F(s)$
9	$e^{\lambda t} f(t)$	$F(s - \lambda)$
10	$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{kun } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{kun } t = 0 \\ 1 & \text{kun } t > 0. \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
11	t^n kun $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
12	t^a (kun $\operatorname{Re} a > -1$)	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
13	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s - \lambda}$
14	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
15	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
16	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
17	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
18	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
19	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
20	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a - b}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
21	$\frac{be^{-bt} - ae^{-at}}{b - a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
22	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
23	$\log t$	$-\frac{\log s}{s} - \frac{\gamma}{s}$
24	$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$	$F(s)G(s)$
25	$\operatorname{erf}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$

Matlabin symbolisen laskennan työkaluihin on ohjelmoitu Laplace-muunnoksia ja käänteismuunnoksia:

```
>> syms t
>> laplace(t^4)
```

```

ans =

24/s^5

>>
>> syms s a
>> ilaplace(1/(s-a)^2)

ans =

t*exp(a*t)

>>
>> ilaplace(1/((s-1)*(s+2)^2))

ans =

1/9*exp(t)+1/9*(-3*t-1)*exp(-2*t)

```

8.5.2 Yleisimmät menetelmät

Laplace-muunnoksen kääntäminen tapahtuu helpoiten edellä olevaa taulukkoa ja Laplace-muunnoksen lineaarisuutta käyttämällä. Toisin sanoen, kuvafunktio $F(s)$ pyritään kirjoittamaan muotoon

$$F(s) = c_1 F_1(s) + \dots + c_n F_n(s), \quad (8.8)$$

missä c_i ovat vakioita ja kuvafunktiot $F_i(s)$ löytyvät taulukon oikeanpuoleisesta sarakkeesta, siis $F_i(s) = \mathcal{L}[f_i](s)$ jollekin funktiolle f_i . Tällöin $F(s)$:n originaalifunktioksi saadaan

$$c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t).$$

Sopivan esityksen (8.8) löytyminen ei kuitenkaan aina ole helppoa. Sellaisen löytämiseksi voi mahdollisesti käyttää jotakin seuraavan yhteenvedon kohtaa.

1. Tarkista, onko $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$. Jos näin ei ole, ei $F(s)$ ole minkään (tavallisen) funktion kuvafunktio, eikä kääntäminen onnistu.

Esimerkki 61 Funktio $F(s) = \frac{s+1}{s}$ ei ole minkään reaalifunktion Laplace-muunnos.

2. Jos $F(s) = F_1(\frac{s}{a})$, missä $a > 0$ on vakio ja F_1 on tunnetun originaalifunktion f_1 kuva, saadaan taulukon 3. rivin perusteella $F(s)$:lle originaalifunktio $a f_1(at)$.

Esimerkki 62 Jos tunnetaan $\mathcal{L}[\cos t](s) = \frac{s}{s^2+1}$, on

$$\frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} \frac{\frac{s}{\omega}}{(\frac{s}{\omega})^2 + 1}$$

ja siis

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

3. Jos $F(s)$ on rationaalifunktio, voi aina etsiä osamurtohajotelman ja soveltaa tunnettua muunnosta

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}\right] = \frac{1}{(s+a)^n}.$$

Esimerkki 63 Olkoon

$$F(s) = \frac{3 + 2s + s^2}{(s-1)(s+2)^2}.$$

Koska nimittäjän tekijä $s + 2$ esiintyy kaksi kertaa, on osamurtohajotelma muotoa

$$\begin{aligned} \frac{3 + 2s + s^2}{(s-1)(s+2)^2} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} \\ &= \frac{A(s+2)^2 + B(s-1)(s+2) + C(s-1)}{(s-1)(s+2)^2} \\ &= \frac{(A+B)s^2 + (4A+B+C)s + 4A-2B-C}{(s-1)(s+2)^2}, \end{aligned}$$

ja A , B ja C voidaan löytää yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 4A + B + C = 2, \\ 4A - 2B - C = 3 \end{cases}$$

jonka ratkaisu on $(A, B, C) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -1)$. Siis

$$\frac{3 + 2s + s^2}{(s-1)(s+2)^2} = \frac{2}{3} \frac{1}{s-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}.$$

Osamurtohajotelman komponentteja varten käytetään muunnosta

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{k-1}e^{at}}{(k-1)!}\right] = \frac{1}{(s-a)^k},$$

jonka perusteella osamurtohajotelmalle voidaan löytää käänteismuunnos.

Täten esimerkiksi

$$\mathcal{L}[e^t](s) = \frac{1}{s-1}, \quad \mathcal{L}[e^{-2t}](s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}[te^{-2t}](s) = \frac{1}{(s+2)^2},$$

ja näiden yhdistelmänä saadaan funktion $\frac{3+2s+2s^2}{(s-1)(s+2)^2}$ originaalifunktio:

$$\frac{2}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} - te^{-2t}.$$

4. Jos $F(s) = F_1(s)F_2(s)$, missä $F_1(s)$:n ja $F_2(s)$:n originaalifunktiot tunnetaan: $\mathcal{L}[f_1] = F_1(t)$ ja $\mathcal{L}[f_2] = F_2(s)$, F :n originaalifunktiota **ei saada muodossa** $f_1 f_2$, vaan muodossa $f_1 * f_2$ (konvoluutio), kuten taulukossa mainitaan. Yleisesti ottaen konvoluution määritelmä vaikuttaa hankalalta:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du \quad \left(= \int_0^t f(t-u)g(u) du = (g * f)(t) \right),$$

mutta joidenkin funktioiden kanssa laskettu konvoluutio on kuitenkin verrattain yksinkertainen (esim. seuraava kohta).

5. Jos kuvafunktio on muotoa $\frac{1}{s}F(s)$, missä F :n originaalifunktio f tunnetaan, saadaan $\frac{1}{s}F(s)$:n originaalifunktio paitsi konvoluutiona $(H * f)(s)$ (H on Heavisiden funktio), myös integraalina

$$\int_0^t f(u) du,$$

mikä on itse asiassa sama asia kuin mainittu konvoluutio $H * f$ (tarkista).

Esimerkki 64 Taulukon mukaan $\mathcal{L}[\sinh](s) = \frac{1}{s^2-1}$, joten funktion $\frac{1}{s} \frac{1}{s^2-1}$ originaalifunktio saadaan integroimalla:

$$\int_0^t \sinh u du = \int_0^t \cosh u = \cosh t - 1.$$

6. Edellistä kohtaa voidaan soveltaa toistuvasti: Määrätään ensin funktion $F_1(s) = \frac{1}{s}F(s)$ originaalifunktio $f_1(t)$, minkä jälkeen funktion $\frac{1}{s^2}F(s) = \frac{1}{s}F_1(s)$ originaalifunktio saadaan integraalina

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(u) du.$$

Esimerkki 65 Funktion $F(s) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{s^2-1}$ originaalifunktio on edellisen esimerkin perusteella

$$\int_0^t (\cosh u - 1) du = \int_0^t (\sinh u - u) = \sinh t - t.$$

7. Eksponenttifunktio $e^{-s\tau}$ ei ole minkään tavallisen funktion kuvafunktio, joten muotoa $e^{-s\tau} F(s)$ olevia funktioita ei voida käsitellä tavanomaisten funktioiden konvoluution avulla. Sen sijaan taulukon rivin 8 mukaan funktion $e^{-s\tau} F(s)$ originaalifunktio on $f(t - \tau)$, jos $\mathcal{L}[f] = F$. Toisaalta eksponenttifunktio $e^{-s\tau}$ on yleistetyn funktion $\delta(t - \tau)$ Laplace-muunnos (kts. delta-funktiota koskeva luku), ja samaan tulokseen päädyttäisiin laskemalla konvoluutio deltafunktion kanssa muodollisesti.

Esimerkki 66 Etsittävä originaalifunktio funktiolle $\frac{1}{(s-4)^3}$ (löytyy tosin myös taulukosta). Aluksi todetaan, että $\mathcal{L}[\frac{1}{2}t^2](s) = \frac{1}{s^3}$, ja tästä saadaan $\mathcal{L}[e^{4t} \frac{1}{2}t^2](s) = \frac{1}{(s-4)^3}$.

8. Jos $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$, missä f on derivoituva ja $f(0+) = \lim_{h \rightarrow 0+} f(h) = 0$, saadaan muotoa $sF(s)$ olevalle funktiolle originaalifunktio käyttämällä derivointisääntöä (taulukon rivi 4): $\mathcal{L}[f'](s) = sF(s)$, joten $sF(s)$:n originaalifunktio on f' . Myös tätä kohtaa voidaan soveltaa toistuvasti.

Esimerkki 67 Tiedetään, että $\mathcal{L}[\sin](s) = \frac{1}{s^2+1}$ ja $\sin(0+) = \sin 0 = 0$. Täten funktiolle $\cos t = \frac{d}{dt} \sin t$ pätee $\mathcal{L}[\cos](s) = \frac{s}{s^2+1}$.

9. Jos $F(s)$ voidaan kirjoittaa funktion F_1 (jolle originaalifunktio f_1 tunnetaan) derivaattana $F_1'(s) = F(s)$, saadaan $F(s)$:lle originaalifunktio $-t f_1(t)$, sillä taulukon rivin 5 perusteella $\mathcal{L}[-t f_1(t)] = F_1' = F$.
10. Jos puolestaan $F'(s) = F_2(s)$, missä F_2 :n originaalifunktio f_2 tunnetaan, merkitään F :n (toistaiseksi tuntematonta) originaalifunktiota f :llä. Tällöin $\mathcal{L}[-t f(t)] = F' = F_2 = \mathcal{L}[f_2(t)]$, mistä saadaan $-t f(t) = f_2(t)$ ja siis $f(t) = -\frac{f_2(t)}{t}$.

Esimerkki 68 Funktiolle $F(s) = \ln \frac{s+1}{s}$ saadaan $F'(s) = \frac{s}{s+1} \frac{s-(s+1)}{s^2} = -\frac{1}{s(s+1)}$. Funktiolla $\frac{1}{s+1}$ on originaalifunktio e^{-t} , joten funktiolle $\frac{1}{s} \frac{1}{s+1}$ sellainen saadaan kohdan 5 mukaan integroimalla:

$$\int_0^t e^{-u} du = \int_0^t -e^{-u} = 1 - e^{-t},$$

siis $\mathcal{L}[e^{-t} - 1] = -\frac{1}{s} \frac{1}{s+1}$. Jos siis $F(s)$:n originaalifunktio on $f(t)$, on

$$\mathcal{L}[-t f(t)](s) = F'(s) = -\frac{1}{s(s+1)} = \mathcal{L}[e^{-t} - 1],$$

mistä

$$f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}.$$

Esimerkki 69 Selvitetään, minkä funktion Laplace-muunnos $F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$ on. Taulukosta nähdään, että $\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, joten $\mathcal{L}[t](s) = \frac{1!}{s^2}$ ja $\mathcal{L}[t^3](s) = \frac{3!}{s^4}$. Tällöin siis $\mathcal{L}[\frac{1}{6}t^3](s) = \frac{1}{s^4}$, ja $\mathcal{L}[t + \frac{1}{6}t^3](s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$. Näin ollen

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}\right)(t) = t + \frac{1}{6}t^3.$$

Laplace-muunnosten kääntämisessä saattaa useiden ominaisuuksien soveltaminen olla tarpeen:

Esimerkki 70 Lasketaan $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s+1)^4}\right)$. Lähdetään liikkeelle tiedosta $\mathcal{L}[t^3](s) = \frac{3!}{s^4}$, jolloin siis $\mathcal{L}[\frac{t^3}{3!}] = \frac{1}{s^4}$. Tähän voidaan puolestaan soveltaa eksponenttifunktiolla kertomista, jonka mukaan $\mathcal{L}[e^{-t} \frac{t^3}{3!}](s) = \frac{1}{(s+1)^4}$. Edelleen derivoimalla saadaan $\mathcal{L}[\frac{1}{6}e^{-t}(3t^2 - t^3)](s) = \frac{s}{(s+1)^4}$, ja derivointi vielä kertaalleen antaa $\mathcal{L}[te^{-t}(1 - 6t + \frac{1}{6}t^2)](s) = \frac{s^2}{(s+1)^4}$, mistä käänteismuunnos voidaan suoraan lukea.

Esimerkki 71 Olkoon $F(s) = \frac{s+1}{s}$. Tätä funktiota vastaavaa originaalifunktiota ei ole, koska $F(s)$ ei lähene nolaa, kun $s \rightarrow \infty$ (vrt. lause 52).