Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

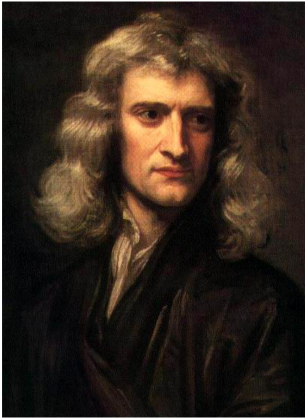
Historiaa

Arkhimedes (n. 287–212 eKr)
Määritti pinta-aloja ja tilavuuksia itse kehittämänsä varhaisen integraalilaskennan avulla

Historiaa

René Descartes (Renatus Cartesius, 1596–1650)
Geometrian ja algebran yhdistäminen.

Historiaa



Sir Isaac Newton (1642–1727)
Differentiaali- ja integraalilaskenta fysiikkaa varten

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)
Differentiaali- ja integraalilaskenta "periaatteen vuoksi"

Historiaa

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)
Differentiaali- ja integraalilaskennan modernisointi

Historiaa

Matemaattinen merkitys

- Differentiaalilaskenta: Suureen ja sen muutoksen samanaikainen käsittely
- Integraalilaskenta: Objektin esittäminen pistemäisten osiensa summana

Yhteiskunnallinen merkitys

- Luonnontieteiden kehitys
- Tekniikan kehitys
- Maailmankuvan kehitys

Raja-arvo

"Määritelmä"

Reaalifunktion $f(x)$ raja-arvo pisteessä x_0 on y, mikäli funktion $f(x)$ arvot tulevat lähelle lukua y, jos x valitaan läheltä lukua x_0.

Esimerkki

Olkoon $\varepsilon > 0$ pieni positiiviluku ja $f(x) = 2x$. Jos nyt valitaan x läheltä lukua 5, on uskottavaa, että $f(x)$ on lähellä lukua 10.
Muodollisesti tämä nähdään seuraavasti:
$d(f(x), 10) = |2x - 10| = 2\,|x - 5| = 2d(x, 5)$.
Jos nyt valitaan x niin läheltä lukua 5 että $d(x, 5) < \frac{1}{2}\varepsilon$, seuraa tästä että $d(f(x), 10) = 2d(x, 5) < 2 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. Tämä merkitsee sitä että $f(x)$ saadaan niin lähelle lukua 10 kuin halutaan: Etäisyys $< \varepsilon$ kunhan x:n etäisyys luvusta 5 valitaan pienemmäksi kuin $< \frac{1}{2}\varepsilon$.

"Määritelmä 2"

Reaalifunktion $f(x)$ raja-arvo pisteessä x_0 on y, mikäli funktion $f(x)$ arvot tulevat *mielivaltaisen* lähelle lukua y, jos x valitaan *riittävän* läheltä lukua x_0.

Huomautus

Attribuutti "läheltä" tarkoitaa sitä, etäisyys $d(f(x), y)$ tai $d(x, x_0)$ on pieni. "Mielivaltaisen läheltä" voidaan puolestaan ilmaista sanomalla, että kaikille $\varepsilon > 0$, etäisyys $d(f(x), y)$ toteuttaa $d(f(x), y) < \varepsilon$, kunhan x on riittävän lähellä lukua x_0, (siis kunhan $d(x, x_0)$ on riittävän pieni).

Määritelmä

Pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ *(avoin) ympäristö* on avoin väli (a, b), joka sisältää pisteen x_0.

Raja-arvo

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 avoimessa ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta. Tällöin

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to x_0} f(x) = y \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(0 < d(x, x_0) < \delta_\epsilon \to d(f(x), y) < \epsilon). \end{aligned}$$

ja sanotaan, että reaalifunktion f *raja-arvo* pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$. Raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ voidaan merkitä myös $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} y$.