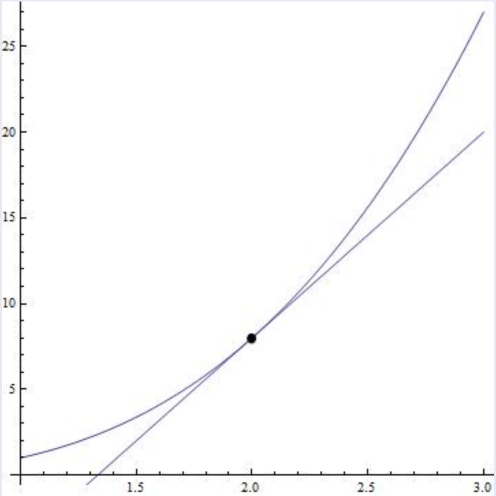
Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Lineaarinen approksimaatio monimutkaisemmalle funktiolle



Lineaarinen approksimaatio monimutkaisemmalle funktiolle

$$f(x) \approx kx + b$$

ja lisäksi

$$f(x_0) = kx_0 + b$$

Koordinaatiston siirto

Merkitään $x = x_0 + h$, jolloin

$$f(x_0 + h) \approx k(x_0 + h) + b = kh + kx_0 + b = kh + f(x_0),$$

siis

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx kh$$

Derivaatta

Määritelmä

Reaalifunktio f on derivoituva pisteessä x, jos on olemassa $k \in \mathbb{R}$ ja funktio $\epsilon(h)$, jolle $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$ siten, että

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h).$$

Lukua k sanotaan funktion f derivaataksi pisteessä x ja merkitään $k = f'(x)$. Funktio f on siis derivoituva pisteessä x, jos sitä voidaan x:n ympäristössä approksimoida "riittävän hyvin" lineaarisella funktiolla.

Huomautus

Lähellä nollaa olevilla h:n arvoilla on ns. jäännöstermi $h\epsilon(h)$ pienempi kuin kh. Huomaa lisäksi, että jos $|h| < 1$, on $\left|h^2\right| < |h|$, $\left|h^3\right| < \left|h^2\right|$, ... jne.

Esimerkki

Jos $f(x) = x^3$, on

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 \\ &= 3x^2h + h\underbrace{(3xh + h^2)}_{\epsilon(h)} \end{aligned}$$

$\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$, joten $f'(x) = 3x^2$.

Derivaatta

Huomautus

$$f(x+h) - f(x) = kh + h\epsilon(h) \Leftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k + \epsilon(h),$$

josta nähdään, että

$$k = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Määritelmä 2

Funktio f on derivoituva pisteessä x, jos raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on olemassa (äärellisenä).

Derivaatta

Määritelmä

Funktion keskimääräinen kasvunopeus k välillä $[x, x+h]$ on funktion arvon muutos suhteessa x:n muutokseen h:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k \Rightarrow f(x+h)-f(x) = kh$$

Esimerkki

Jos $f(x) = kx + b$, on

$$f(x+h) - f(x) = k(x+h) + b - (kx+b) = kh$$

Derivaatta

Määritelmä

Jos funktio f on derivoituva pisteessä x, on

$$f(x+h) - f(x) = kh + h\epsilon(h)$$

ja siksi funktion f kasvunopeus pisteessä x määritellään $k = f'(x)$.

Derivaatta

Lause

Jos f on derivoituva pisteessä x_0, on se myös jatkuva pisteessä x_0.

Määritelmä

Jos f on derivoituva (avoimen) välin I jokaisessa pisteessä, sanotaan, että f on derivoituva välillä I. Funktiota $x \mapsto f'(x)$ sanotaan f:n *derivaattafunktioksi*.

Derivaattafunktiosta käytetään $f'(x)$:n lisäksi merkintöjä $Df(x)$, $D_x f(x)$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{df}{dx}$ ja mikäli merkitään $y = f(x)$, myös merkinnät $\frac{dy}{dx}$ ja y' ovat tavallisia. Jos tuntemattomia on useita ja ainoastaan x:n muutosta tarkastellaan, käytetään osittaisderivaattamerkintää $\frac{\partial f}{\partial x}$ tai $D_x f(x)$.

Derivaatta

Historiaa

Leibnitzin merkintä

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

sisältää differentiaalilaskennan varhaisvaiheissa vallineen ajatuksen "äärettömän pienten" suureiden dy ja dx osamäärästä, dx ja $dy = f(x+dx) - f(x)$ ovat äärettömän pieniä (infinitesimaalisia) lisäyksiä x:lle ja y:lle.
Nykyisessä (standardimuotoisessa) differentiaalilaskennassa merkintä $\frac{dy}{dx}$ ei ole osamäärä, vaan ainoastaan derivaatan merkintätapa.

Derivaatta

Esimerkki

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'(x) = ?$$

Derivointisääntöjä

Lause: Vakiofunktion derivaatta

Jos $f(x) = c$ on vakio välillä I, niin $f'(x) = 0$ välillä I.

Lause: Summan ja tulon derivointi

- $D(af(x) + bg(x)) = af'(x) + bg'(x)$
- $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Derivointisääntöjä

Lause: Ketjusääntö

Olkoon $f(x)$ derivoituva välillä I ja $g(x)$ derivoituva välillä $f(I)$. Tällöin $g \circ f$ on derivoituva välillä I ja

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Huomautus

Jos merkitään $y = f(x)$ ja $z = g(y) = g(f(x))$, voidaan ketjusääntö esittää Leibnitzin merkinnöillä seuraavasti:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Esimerkki

Koska

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2},$$

on

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)^2}f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2},$$

kunhan $f(x) \neq 0$.

Lause: Osamäärän derivaatta

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx}(f(x)g(x)^{-1}) = f'(x)g(x)^{-1} + f(x)\frac{d}{dx}g(x)^{-1} \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\Big(-\frac{1}{g(x)^2}\cdot g'(x)\Big) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}
$$

Derivointisääntöjä

Lause: Potenssifunktion derivaatta

$$\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1},$$

kun $k \in \mathbb{Z}$.

Todistus

Jos $k = 0$, on $x^0 = 1$ ja väite seuraa suoraan.
Jos $k > 0$, on

$$
\begin{aligned}
(x+h)^k - x^k &= x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} h + \binom{k}{2} x^{k-2} h^2 + \ldots + h^k - x^k \\
&= k x^{k-1} h + \binom{k}{2} x^{k-2} h^2 + \ldots + h^k \\
&= k x^{k-1} h + h \underbrace{\left(\binom{k}{2} x^{k-2} h^1 + \ldots + h^{k-1} \right)}_{\epsilon(h)}.
\end{aligned}
$$

Jos $k < 0$, merkitään $x^k = (\frac{1}{x})^{-k}$ ja käytetään aiempia tuloksia.

Derivointisääntöjä

Lause: Käänteisfunktio

Jos f on injektiivinen jossakin pisteen x ympäristössä I, derivoituva pisteessä x ja $f'(x) \neq 0$, on käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $y = f(x)$ ja

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

"Todistus"

Koska

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$

saadaan ketjusäännöllä

$$Df^{-1}(f(x))f'(x) = 1.$$

Sinifunktion derivaatta

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{h}(\sin(x+h) - \sin x) \\
= \; & \frac{1}{h} \cdot 2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2} \\
= \; & \frac{\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \xrightarrow{h\to 0} \cos x.
\end{aligned}
$$

Derivointisääntöjä

Muita derivointisääntöjä

- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$,
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$,
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.
- $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

Yleinen potenssifunktio

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha}?$$