Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Huomautus

Tulon derivointisääntö $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ei tuota helppoa sääntöä tulon antiderivaatalle, mutta siitä seuraa, että

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Osittaisintegrointi

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Esimerkkejä

- $\int \ln x \, dx$
- $\int x \sin x \, dx$
- $\int x^2 e^x \, dx$.

Antiderivaatta

Sijoitus määräämättömään integraaliin

Jos F on f:n antiderivaatta, on

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = f(g(t))g'(t),$$

josta

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)).$$

Antiderivaatta

Muistisääntö sijoitukseen

Laskettaessa antiderivaattaa

$$\int f(x)\,dx$$

voidaan sijoittaa $x = g(t)$, jolloin $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ ja siis

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Esimerkki

$$\int \frac{1}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx, \;\; x = \sqrt{5}\sin t.$$

Antiderivaatta

Rationaalifunktio

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx?$$

Derivointisääntöjä

- $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{f(x)^n} = -\dfrac{nf'(x)}{f(x)^{n+1}}$
- $\dfrac{d}{dx}\ln|f(x)| = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
- $\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{x^2+1}.$

Esimerkki

$$\int \frac{4x+3}{(2x^2+3x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{2x^2+3x-1} + C$$

Esimerkki

$$\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C$$

Väliarvolause

Rollen lause

Jos f on välillä $[a, b]$ derivoituva ja $f(a) = f(b)$, on maksimi- tai minimikohdassa välillä $[a, b]$ voimassa $f'(\xi) = 0$.

Differentiaalilaskennan väliarvolause

Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b), niin tällöin on ainakin yksi piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(b - a) = f(b) - f(a).$$

Väliarvolause

Integraalilaskennan (antiderivaatojen) peruslause

Jos välillä I on $f'(x) = 0$, niin f on vakio välillä I.

Todistus

Jos a, $x \in I$, niin

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0,$$

joten $f(x) = f(a)$.

Seuraus

Jos $f'(x) = g'(x)$ välillä I, niin $f(x) = g(x) + C$ välillä I

Todistus

Funktio $h(x) = f(x) - g(x)$ toteuttaa $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, joten se on vakio C välillä I.

Väliarvolause

Seuraus

Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $I = (a, b)$, niin f on kasvava välillä $[a, b]$

Todistus

Valitaan $x_1 < x_2$ väliltä $[a, b]$. Tällöin

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0.$$

Huomautus

Jos välillä (a, b) on $f'(x) > 0$, $f'(x) \leq 0$, tai $f'(x) < 0$, voidaan vastaavasti todistaa, että funktio f on aidosti kasvava, vähenevä, tai aidosti vähenevä välillä $[a, b]$.

Väliarvolause

Yleistetty väliarvolause

Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia sen sisällä, on olemassa piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Todistus

Apufunktio

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

toteuttaa Rollen lauseen ehdot, joten on olemassa ξ, jolle $h'(\xi) = 0$. Koska $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, seuraa väite suoraan tästä. $\square$

Huomautus

Tavallinen väliarvolause saadaan yleistetystä valitsemalla $g(x) = x$.

l'Hospitalin sääntö

Lause (l'Hospital)

Olkoon $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ ja $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ ja raja-arvo

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olemassa äärellisenä tai äärettömänä. Silloin

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Todistuksen idea

Yleistetyn väliarvolauseen perusteella

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

missä $\xi \in (a, x)$ (Jos $f(a)$ tai $g(a)$ ei ole aiemmin määritelty, määritellään ne nollaksi). Koko ajan joka tapauksessa $|\xi| \leq |x|$, joten $\xi \xrightarrow{x \to 0} 0$.

Esimerkkejä

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$