Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Väliarvolause

Rollen lause

Jos f on välillä $[a, b]$ derivoituva ja $f(a) = f(b)$, on maksimi- tai minimikohdassa välillä $[a, b]$ voimassa $f'(\xi) = 0$.

Differentiaalilaskennan väliarvolause

Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b), niin tällöin on ainakin yksi piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(b - a) = f(b) - f(a).$$

Väliarvolause

Integraalilaskennan (antiderivaatojen) peruslause

Jos välillä I on $f'(x) = 0$, niin f on vakio välillä I.

Todistus

Jos a, $x \in I$, niin

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0,$$

joten $f(x) = f(a)$.

Seuraus

Jos $f'(x) = g'(x)$ välillä I, niin $f(x) = g(x) + C$ välillä I

Todistus

Funktio $h(x) = f(x) - g(x)$ toteuttaa $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, joten se on vakio C välillä I.

Väliarvolause

Seuraus

Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $I = (a, b)$, niin f on kasvava välillä $[a, b]$

Todistus

Valitaan $x_1 < x_2$ väliltä $[a, b]$. Tällöin

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0.$$

Huomautus

Jos välillä (a, b) on $f'(x) > 0$, $f'(x) \leq 0$, tai $f'(x) < 0$, voidaan vastaavasti todistaa, että funktio f on aidosti kasvava, vähenevä, tai aidosti vähenevä välillä $[a, b]$.

Väliarvolause

Yleistetty väliarvolause

Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia sen sisällä, on olemassa piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Todistus

Apufunktio

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

toteuttaa Rollen lauseen ehdot, joten on olemassa ξ, jolle $h'(\xi) = 0$. Koska $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, seuraa väite suoraan tästä. $\square$

Huomautus

Tavallinen väliarvolause saadaan yleistetystä valitsemalla $g(x) = x$.

l'Hospitalin sääntö

Lause (l'Hospital)

Olkoon $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ja $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ ja raja-arvo

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olemassa äärellisenä tai äärettömänä. Silloin

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

l'Hospitalin sääntö

Todistuksen idea

Yleistetyn väliarvolauseen perusteella

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

missä $\xi \in (a, x)$ (Jos $f(a)$ tai $g(a)$ ei ole aiemmin määritelty, määritellään ne nollaksi). Koko ajan joka tapauksessa $|\xi| \leq |x|$, joten $\xi \xrightarrow{x \to 0} 0$.

Esimerkkejä

- $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

Käyrän tangentti

Esimerkkejä

- Käyrän $y = f(x) = x^3$ tangentti pisteessä $x = 2$.
- Yksikköympyrälle $x^2 + y^2 = 1$ pisteeseen $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ liittyvän tangentin yhtälö.

Muutoksen arviointi

Lineaarinen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

Merkitään $\Delta x = h$ ja $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, jolloin

$$\underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\Delta y} \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

Esimerkki

Pallon sädettä kasvatetaan prosentin verran. Paljonko kasvaa tilavuus?

Funktion kulku

Määritelmä

Piste x_0 on reaalifunktion f *lokaali maksimi*, jos on olemassa sellainen pisteen x_0 ympäristö I, että $f(x) \leq f(x_0)$ aina, kun $x \in I$. Vastaavasti määritellään lokaali minimi. Lokaaleja maksimeja ja minimejä kutsutaan yhteisellä nimellä *ääriarvopisteet*.

Huomautus

Jos f on derivoituva, on Rollen lauseen todistuksen perusteella ääriarvopisteissä x_0 on välttämättä $f'(x_0) = 0$.

Funktion kulku

Huomautus

Voidaan todistaa: Jos $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$, on x_0 lokaali maksimi. Jos taas $f''(x_0) > 0$, on x_0 lokaali minimi. Jos taas $f''(x_0) = 0$, ei x_0 välttämättä ole ääriarvopiste, vaan voi olla ns. satulapiste.

Yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt

Määritelmä

Differentiaaliyhtälö (DY) on muotoa

$$F(x, y, y', y'', \ldots, \ldots) = 0$$

oleva yhtälö. DY:n kertaluku on korkein DY:ssä esiintyvän derivaatan kertaluku.

Huomautus

Muotoa $y' = f(x)$ olevan differentiaaliyhtälön ratkaiseminen on periaatteessa yksinkertaista:

$$y = \int f(x)\,dx + C.$$

Vakio C määräytyy ns. alkuehdon (reunaehdon) $y(0) = y_0$ perusteella.

Yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt

Suoraviivainen tasaisesti kiihtyvä liike

$$s''(t) = v'(t) = a(t) = a.$$

Radioaktiivinen hajoaminen

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

Automaattisorvi

$$D(t)D'(t) = k$$