Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Integraalilaskenta

Varhaisvaiheet

- Eudoksos Knidoslainen (410 tai 408 eKr–355 tai 347 eKr)
- Arkhimedes Syrakusalainen (n.287 eKr–n.212 eKr)

Uusi aika

- Isaac Newton (1642–1727)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Linkki differentiaalilaskentaan

Newtonin-Leibnizin kaava

Integraalilaskenta

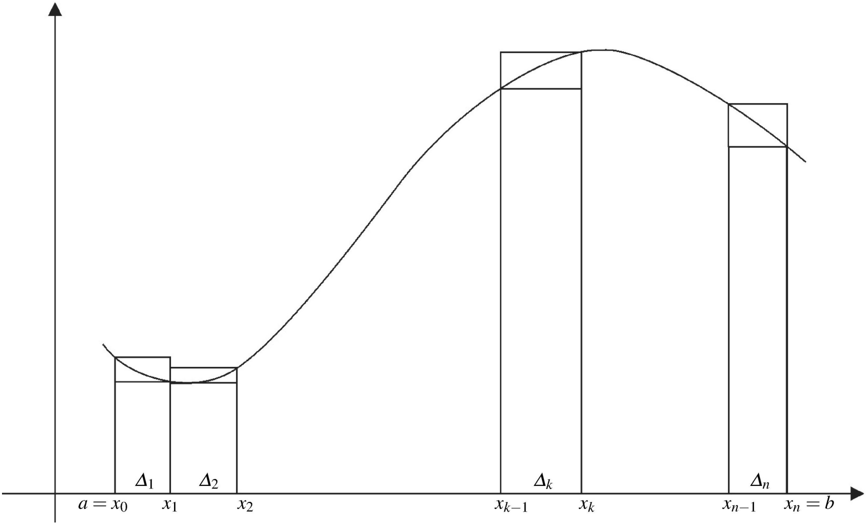
Nykyaikainen muotoilu

- Bernhard Riemann (1826–1866)
- Jean Gaston Darboux (1842–1917)
- Johtavat samaan integraalikäsitteeseen, Darboux'n esitys yksinkertaisempi

Yleistyksiä (ei kuulu kurssiin)

- Stieltjesin integraali
- Lebesguen integraali
- Haarin integraali

Darboux'n integraali



Darboux'n integraali

Taustaoletus

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty rajoitettu funktio.

Merkintöjä

- Välin $[a, b]$ jako on äärellinen joukko $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, missä $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_i < x_{i+1}$.
- $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ on jaon i:s väli
- $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ on i:nnen välin pituus
- $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in \Delta_i\}$
- $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in \Delta_i\}$

Darboux'n integraali

Määritelmä

Välin $[a, b]$ jakoon D liittyvä funktion f Darboux'n yläsumma on

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i x$$

ja alasumma

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i x$$

Lause

Jokaiselle jaolle D pätee

$$\underline{S}_D \leq \overline{S}_D.$$

Darboux'n integraali

Määritelmä

Jos D_1 ja D_2 ovat molemmat välin $[a, b]$ jakoja, sanotaan, että D_2 on D_1:n tihennys, jos $D_1 \subseteq D_2$.

Huomautus

Koska jaot ovat äärellisiä joukkoja, saadaan D_2 joukosta D_1 lisäämällä äärellinen määrä pisteitä.

Lause

Jos D_2 on jaon D_1 tihennys, niin $\overline{S}_{D_2} \leq \overline{S}_{D_1}$ ja $\underline{S}_{D_2} \geq \underline{S}_{D_1}$.

Lause

Mikään alasumma ei voi ylittää mitään yläsummaa, siis $\underline{S}_{D_1} \leq \overline{S}_{D_2}$ kaikille jaoille D_1 ja D_2.

Huomautus

Välin $[a, b]$ jako $D_0 = \{a, b\}$ tuottaa ylä- ja alasummat $\overline{S}_{D_0} = M(b-a)$ ja $\underline{S}_{D_0} = m(b-a)$, missä M ja m ovat funktion f supremum- ja infimum koko välillä $[a, b]$.

Lause

Alasummien joukko on on ylhäältä rajoitettu ja yläsummien alhaalta rajoitettu.

Darboux'n integraali

Määritelmä

Funktion f yläintegraali välillä $[a, b]$ on

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{S}_D \mid D \text{ on välin } [a, b] \text{ jako}\}$$

ja alaintegraali

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}_D \mid D \text{ on välin } [a, b] \text{ jako}\}$$

Darboux'n integraali

Määritelmä

Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio on Darboux-integroituva (ja samalla Riemann-integroituva), mikäli

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

Tällöin ylä- ja alaintegraalin yhteistä arvoa kutsutaan funktion f (Darboux- tai Riemann-) integraaliksi välillä $[a, b]$ ja siitä käytetään merkintöjä

$$\int_a^b f \quad \text{ja} \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

Lukuja a ja b kutsutaan integrointivälin tai integraalin ala- ja ylärajoiksi ja funktiota f integrandiksi.

Esimerkki

- Esimerkki: Vakiofunktio
- Esimerkki Joukon $\mathbb{Q}$ karakteristinen funktio.

Lause

Jos $\mathcal{D}'$ on jokin kokoelma välin $[a, b]$ jakoja ja

$$I = \sup\{\underline{S}_{D'} \mid D' \in \mathcal{D}'\} = \inf\{\overline{S}_{D'} \mid D' \in \mathcal{D}'\},$$

niin tällöin f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f = I.$$

Darboux'n integraali

Esimerkki

Esimerkki $f(x) = x^2$, tasavälinen jako välillä $[0, 1]$.

Riemannin integroituvuusehto

Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio f on integroituva tarkalleen silloin, kun jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen jako D, että

$$\overline{S}_D - \underline{S}_D = d(\overline{S}_D, \underline{S}_D) \leq \epsilon.$$

Lause

Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$, on se myös integroituva välillä $[a, b]$.

Lause

Jos integroituvan funktion arvoa muutetaan yhdessä pisteessä, säilyy sekä integroituvuus että integraalin arvo.

Lause

Oletetaan, että f ja g integroituvia välillä $[a, b]$. Tällöin myös funktiot cf $(c \in \mathbb{R})$ ja $f + g$ ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f,$$

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Vertaa:

$$\sum_{i=1}^n cf_i = c \sum_{i=1}^n f_i$$

$$\sum_{i=1}^n (f_i + g_i) = \sum_{i=1}^n f_i + \sum_{i=1}^n g_i.$$

Lause

Jos f on integroituva välillä $[a, b]$ ja $c \in (a, b)$, niin

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Vertaa:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{m} f_i + \sum_{i=m+1}^{n} f_i.$$

Lause

Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a, b]$, niin samoin on $f \pm g$ ja fg. Jos lisäksi $\frac{1}{g}$ on rajoitettu välillä $[a, b]$, niin myös $\frac{f}{g}$ on integroituva.

Integraalien ominaisuuksia

Määritelmä

Jos $a < b$ ja f on integroituva välillä $[a, b]$, määritellään

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

ja

$$\int_a^a f = 0.$$

Seuraus

Jos f on integroituva välillä I, on

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

kaikille välin I luvuille a, b ja c.

Integraalien ominaisuuksia

Lause

Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja $f \leq g$, on

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Vertaa: Jos $f_i \leq g_i$, on

$$\sum_{i=1}^n f_i \leq \sum_{i=1}^n g_i$$

Lause

Jos $f \geq 0$ on jatkuva välillä $[a, b]$ niin $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$ ja $= 0$ tarkalleen silloin kun $f = 0$ välillä $[a, b]$.

Kolmioepäyhtälö

Jos f on integroituva välillä $[a, b]$, niin myös $|f|$ on integroituva ja tällöin

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Vertaa:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i|.$$

Huomautus

Jos $a > b$, on

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|.$$

Analyysin peruslause

Määritelmä

Oletetaan, että f on integroituva välillä I ja että $c \in I$. Tällöin jokaista $x \in I$ kohti voidaan määritellä

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt.$$

Funktiota $F : I \to \mathbb{R}$ kutsutaan f:n integraalifunktioksi.

Lause

Välillä I rajoitetun ja integroituvan funktion f integraalifunktio on jatkuva välillä I.

Esimerkki

$f(x) = 0$, kun $x < 0$ ja $f(x) = 1$, kun $x \geq 0$.

Analyysin peruslause

Analyysin peruslause

Funktion f integraalifunktio F on derivoituva niissä pisteissä, missä f on jatkuva. Näissä pisteissä pätee lisäksi

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f = f(x).$$

Seuraus

Välillä I jatkuvalla funktiolla on olemassa antiderivaatta.

Todistus

$$
\begin{aligned}
& F(x+h) - F(x) \\
= \; & \int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt \\
= \; & \int_c^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt \\
= \; & \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} (f(x) + f(t) - f(x))\,dt \\
= \; & \int_x^{x+h} f(x)\,dt + \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt \\
= \; & f(x) \cdot h + h \cdot \underbrace{\frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt}_{\epsilon(h)}
\end{aligned}
$$

Todistus (jatkoa)

Olkoon $\varepsilon > 0$. Kun $|h|$ on riittävän pieni, on $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ ja

$$\begin{aligned}
|\epsilon(h)| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t) - f(x))\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h}|f(t) - f(x)|\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h}\varepsilon\,dx\right| \\
&= \frac{1}{h}\cdot h\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$