Insinöörimatematiikka: Differentiaali- ja integraalilaskenta

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2023

Epäoleelliset integraalit

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a,\ b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.
- Yleistystä väleille $[a, \infty)$ tai $(-\infty, b]$ kutsutaan I lajin epäoleelliseksi integraaliksi
- Yleistystä funktioille, jotka eivät ole rajoitettuja kutsutaan II lajin epäoleelliseksi integraaliksi.

I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \to \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on olemassa. Tällöin sanotaan, että integraali $\displaystyle\int_a^\infty f$ *suppenee* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

Jos raja-arvoa ei ole äärellisenä, sanotaan että integraali *hajaantuu* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \uparrow$$

Huomautus

Integraali $\int_{-\infty}^{b} f$ määritellään analogisesti, mutta integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f$$

määritelmään pitää kiinnittää enemmän huomiota ja sitä pitää tarkastella yksityiskohtaisemmin.

Esimerkki

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_0^\infty \cos x \, dx$$

Esimerkki ($a > 0$)

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^s} \, dx$$

Lause

Oletetaan, että f on integroituva yli kaikkien välien $[c, d] \subseteq [a, \infty)$, Tällöin integraali $\int_a^\infty f$ suppenee tarkalleen silloin kun $\int_b^\infty f$ suppenee kaikilla $b > a$. Suppenevassa tapauksessa pätee lisäksi

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f.$$

Lause

$$\int_a^\infty (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^\infty f + \beta \int_a^\infty g,$$

mikäli oikean puolen integraalit suppenevat (On mahdollista, että vasemman puolen integraali suppenee, vaikka oikean puolen eivät).

I lajin epäoleellinen integraali

Vertailutarkastin

Olkoon $0 \leq f \leq g$ kun $x \geq M$, f ja g integroituvia kaikilla väleillä $[a, b]$. Tällöin

- $\displaystyle\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- $\displaystyle\int_a^\infty f \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty g \uparrow$

Lisäksi sanotaan että f on g:n minorantti ja että g on f:n majorantti.

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx \quad \text{ja} \quad \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Olkoot $f(x)$, $g(x) > 0$ kun $x \geq M$ ja $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Tällöin

- Jos $L = 0$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Leftrightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $L = \infty$, niin $\int_a^\infty g \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty f \uparrow$

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{x^s}{1+x^2}\, dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

Määritelmä

Jos $\int_a^\infty f$ suppenee mutta $\int_a^\infty |f|$ hajaantuu, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee ehdollisesti. Jos $\int_a^\infty |f|$ suppenee, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee itseisesti.

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\, dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx \qquad \int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\, dx$$

II lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b-\epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b-\epsilon, b)$ $(\epsilon > 0)$. Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Käsitteet suppeneminen ja hajaantuminen määritellään kuten I lajin epäoleellisille integraaleille.

Integraali, jossa f ei ole rajoitettu alarajan a ympäristössä, määritellään analogisesti:

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^b f.$$

II lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s}\,dx$$

Esimerkkki

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^s(x^2+1)}\,dx$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x-1}\,dx$$

Yleinen epäoleellinen integraali

Yleinen periaate

Integrointiväli jaetaan niin moneen osaväliin, että kullakin esiintyy vain yksi epäoleellisuus. Jos yksikin osista hajaantuu, sanotaan integraalin hajaantuvan.

Esimerkki

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$$

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu kaikkialla muualla paitsi pisteen $c \in (a, \infty)$ ympäristössä. Valitaan $d > c$ ja tällöin

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^\infty f.$$

Kaksi ensimmäistä integraalia ovat II lajin epäoleellisia, viimeisin I lajin.

Yleinen epäoleellinen integraali

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu koko reaaliakselilla. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{0} f + \int_{0}^{\infty} f = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{0} f + \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} f$$

Määritelmä

Integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} f$ Cauchyn pääarvo määritellään

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} f$$

ja tästä käytetään myös yleensä merkintää $\int_{-\infty}^{\infty} f$.

Yleinen epäoleellinen integraali

Huomautus

Fourier-analyysissa $\int_{-\infty}^{\infty} f$ tarkoittaa yleensä Cauchyn pääarvoa.