

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Demonstraatio 2, 29.2.2024

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' + 2y' + y = e^{3t}$ reunaehdoilla $y(0) = y'(0) = 1$ käyttämällä Laplace-muunnoksia.
2. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' - \frac{2}{x}y = x^2$.
3. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + \frac{1}{2x}y = x\sqrt{x}$.
4. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Etsi differentiaaliyhtälölle

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

sarjaratkaisut alkuehdoilla $y(0) = 1, y'(0) = 0$ ja alkuehdoilla $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Millä vakion λ arvoilla löytyy ratkaisu, joka on polynomifunktio? Ohje: Oleta funktion y olevan muotoa

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

derivoi termeittäin derivaattaa y' varten ja toisen kerran y'' :a varten. Sijoita näin saadut lausekkeet differentiaaliyhtälöön, nosta/laske summausindeksejä sopivasti ja päättele miten kerroin a_{n+2} riippuu kertoimesta a_n . Kirjoita sarjan muutama ensimmäinen termi näkyviin.

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y^3 y' = x^2$
6. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = (x+1)(y+1)$
7. Totea että differentiaaliyhtälö $3x^2 + 2xy + 3 + (x^2 - 4y)y' = 0$ on eksakti.
8. Etsi sellainen kahden muuttujan funktio $F(x, y)$, että $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 3xy + 3$ ja $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - 4y$. Ohje: Aloita ensimmäisestä yhtälöstä ja integroi x :n suhteen pitäen y :tä vakiona. Mitä voit sanoa mahdollisesta integrointivakiosta? Tämän jälkeen voit derivoida näin saatun funktion y :n suhteen ja verrata sitä lausekkeeseen $x^2 - 4y$.
9. Newtonin toisen liikelain mukaan kappaleeseen vaikuttavien voimien summa F on yhtäsuuri kuin kappaleen liikemäärän $p = mv$ muutosnopeus, siis $F = \frac{d}{dt}(mv)$. Jos kappaleen massa pysyy vakiona, voidaan tämä kirjoittaa muotoon $F = m \frac{d}{dt}v = ma$, mutta muuttuvan massan tapauksessa on käytettävä tulon derivointisääntöä.

Kirjoita Newtonin lain mukainen liikeyhtälö kuvaamaan tilannetta, jossa maan pinnalta lähetettävään avaruusrakettiin vaikuttavat voimat ovat ainoastaan moottorin työntövoima F sekä maan gravitaatiovoima. Oletetaan, että työntövoima F pysyy vakiona ja samalla raketin massa m vähenee tasaisesti polttoaineen hupertessa: $m = m_0 - kt$ (k kuvaa polttoaineen kulutusnopeutta).

Kirjoita yhtälö siten, että tuntematon funktio s edustaa raketin etäisyyttä maan keskipisteestä. Esitä gravitaation suuruus Newtonin gravitaatiolain mukaisessa muodossa $G \frac{Mm}{s^2}$, missä M on maan ja m on raketin massa ja s massakeskipisteiden välinen etäisyys. Yhtälöä ei tarvitse ratkaista, mutta selvitä mitä menetelmiä saadun differentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi kurssilla on toistaiseksi esitetty (jos yhtään).