Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Demonstraatio 2, 29.2.2024

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' + 2y' + y = e^{3t}$ reunaehdoilla $y(0) = y'(0) = 1$ käyttämällä Laplace-muunnoksia.

   Mallivastaus: Merkitään $Y = \mathcal{L}[y(t)]$, jolloin Laplace-muunnokset laskemalla saadaan
   $$s^2Y - s - 1 + 2(sY - 1) + Y = \frac{1}{s-3,}$$
   ja tästä
   $$Y = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s-3)(s+1)^2}.$$
   Laplace-muunnoksen kääntämistä vartem viimeisin termi on jaettava osamurtoihin:
   $$\frac{1}{(s-3)(s-1)^2} = \frac{1}{16}\frac{1}{s-3} - \frac{1}{16}\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)^2},$$
   joten
   $$Y = \frac{15}{16}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{16}\frac{1}{s-3} + \frac{7}{4}\frac{1}{(s+1)^2}$$
   Taulukon mukaan kääntämällä saadaan
   $$y(t) = \frac{15}{16}e^{-t} + \frac{1}{16}e^{3t} - \frac{7}{4}te^{-t}.$$

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' - \frac{2}{x}y = x^2$.

   Mallivastaus: Aloitetaan homogeenisesta versiosta:
   $$y' - \frac{2}{x}y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow y = Cx^2.$$
   Vakion variointi: Merkitään $y = C(x)x^2$, jolloin $y' = C'(x)x^2 + 2xC(x)$, ja sijoittamalla tämä alkuperäiseen yhtälöön saadaan $C'(x) = 1$, josta $C(x) = x + C$. Näin ollen
   $$y = (x + C)x^2 = x^3 + Cx^2.$$

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + \frac{1}{2x}y = x\sqrt{x}$.

   Mallivastaus: Aloitetaan homogeenisesta versiosta:
   $$y' + \frac{1}{2x}y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{2x} \Leftrightarrow y = Cx^{-\frac{1}{2}}.$$
   Vakion variointi: Merkitään $y = C(x)x^{-\frac{1}{2}}$, jolloin $y' = C'(x)x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}C(x)x^{-\frac{3}{2}}$, ja sijoittamalla tämä saadaan $C'(x) = x^2$, josta $C(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$. Näin ollen
   $$y = (\frac{1}{3}x^3 + C)x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x^{\frac{5}{2}} + Cx^{-\frac{1}{2}}.$$

4. Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Etsi differentiaaliyhtälölle
   $$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

sarjaratkaisut alkuehdoilla $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ ja alkuehdoilla $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Millä vakion λ arvoilla löytyy ratkaisu, joka on polynomifunktio? Ohje: Oleta funktion y olevan muotoa

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

derivoi termeittäin derivaattaa y' varten ja toisen kerran y'':a varten. Sijoita näin saadut lausekkeet differentiaaliyhtälöön, nosta/laske summausindeksejä sopivasti ja päättele miten kerroin a_{n+2} riippuu kertoimesta a_n. Kirjoita sarjan muutama ensimmäinen termi näkyviin.

Mallivastaus: Olkoon

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

josta

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

ja

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

Täten

$$y'' - 2xy' + \lambda y = \sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda - 2n)a_n\Big)x^n$$

Tällöin kaikilla n:n arvoilla pitää olla

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda - 2n)a_n = 0,$$

josta

$$a_{n+2} = \frac{(2n-\lambda)a_n}{(n+2)(n+1)}$$

Näin ollen $a_2 = \frac{-\lambda}{2\cdot 1}a_0$, $a_3 = \frac{2-\lambda}{3\cdot 2}a_1$, $a_4 = \frac{4-\lambda}{4\cdot 3}a_2 = \frac{(4-\lambda)(-\lambda)}{4!}a_0$, $a_5 = \frac{6-\lambda}{5\cdot 4}a_3 = \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}a_1$, $a_6 = \frac{8-\lambda}{6\cdot 5}a_4 = \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)(-\lambda)}{6!}a_0$, jne. Ryhmittelemällä parilliset ja parittomat termit erikseen saadaan

$$\begin{aligned} y &= a_0\Big(1 + \frac{-\lambda}{2}x^2 + \frac{(4-\lambda)(-\lambda)}{4!}x^4 + \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)(-\lambda)}{6!}x^6 + \ldots\Big) \\ &+ a_1\Big(x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7 + \ldots\Big) \end{aligned}$$

Kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua saadaan valitsemalla esim. ensin $(a_0, a_1) = (0, 1)$ ja sitten $(a_0, a_1) = (1, 0)$. Polynomaalinen ratkaisu on mahdollinen jos $\lambda = 2M$ on parillinen luku; tällöin jommassa kummassa sarjassa termit ovat jostain rajasta alkaen nollia.

5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y^3y' = x^2$

   Mallivastaus: Yhtälö on separoituva.

$$y^3\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \int y^3\,dy = \int x^2\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{3}x^3 + C_1.$$

   Tästä voidaan edelleen ratkaista $y^4 = \frac{4}{3}x^3 + C$ ja $y = (\frac{4}{3}x^3 + C)^{\frac{1}{4}}$.

6. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = (x+1)(y+1)$

   Mallivastaus: Yhtälö on separoituva.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x+1)(y+1) \Leftrightarrow \frac{1}{y+1}\,dy = (x+1)\,dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{1}{y+1}\,dy = \int (x+1)\,dx + C \Leftrightarrow \ln|y+1| = \frac{1}{2}x^2 + x + C. \end{aligned}$$

   Tästä saadaan

$$|y+1| = e^{\frac{1}{2}x^2+x+C},$$

   joten mikäli $y > -1$, on

$$y = -1 + e^{\frac{1}{2}x^2+x+C}.$$

   Jos taas $y < -1$, on

$$y = -1 - e^{\frac{1}{2}x^2+x+C}$$

   Jos $y = -1$ on vakio, ei jakaminen alussa onnistu mutta voidaan todeta että $y = -1$ on kuitenkin ratkaisu.

7. Totea että differentiaaliyhtälö $3x^2 + 2xy + 3 + (x^2 - 4y)y' = 0$ on eksakti.

   Mallivastaus: Lasketaan

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy + 3) = 2x$$

   ja

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 4y) = 2x.$$

   Koska osittaisderivaatat ovat samat, on yhtälö eksakti.

8. Etsi sellainen kahden muuttujan funktio $F(x,y)$, että $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 3xy + 3$ ja $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - 4y$. Ohje: Aloita ensimmäisestä yhtälöstä ja integroi x:n suhteen pitäen y:tä vakiona. Mitä voit sanoa mahdollisesta integrointivakiosta? Tämän jälkeen voit derivoida näin saatun funktion y:n suhteen ja verrata sitä lausekkeeseen $x^2 - 4y$.

   Mallivastaus: Jos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + 3,$$

   saadaan x:n suhteen integroimalla

$$F = x^3 + x^2y + 3x + C(y).$$

   Integrointivakio $C(y)$ on vakio vain siinä mielessä, että se ei riipu x:stä, jolloin sen derivaatta x:n suhteen derivoimalla on 0.

   Näin saadulle funktiolle F on

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + C'(y),$$

   ja vertaamalla tätä lausekkeeseen $x^2 - 4y$ voidaan päätellä $C'(y) = -4y$. Tällöin $C(y) = -2y^2 + C$ ja

$$F(x,y) = x^3 + x^2y + 3x - 4y + C.$$

9. Newtonin toisen liikelain mukaan kappaleeseen vaikuttavien voimien summa F on yhtäsuuri kuin kappaleen liikemäärän $p = mv$ muutosnopeus, siis $F = \frac{d}{dt}(mv)$. Jos kappaleen massa pysyy vakiona, voidaan tämä kirjoittaa muotoon $F = m\frac{d}{dt}v = ma$, mutta muuttuvan massan tapauksessa on käytettävä tulon derivointisääntöä.

   Kirjoita Newtonin lain mukainen liikeyhtälö kuvaamaan tilannetta, jossa maan pinnalta lähetettävään avaruusrakettiin vaikuttavat voimat ovat ainoastaan moottorin työntövoima F sekä maan gravitaatiovoima. Oletetaan, että työntövoima F pysyy vakiona ja samalla raketin massa m vähenee tasaisesti polttoaineen huvetessa: $m = m_0 - kt$ (k kuvaa polttoaineen kulutusnopeutta).

   Kirjoita yhtälö siten, että tuntematon funktio s edustaa raketin etäisyyttä maan keskipisteestä. Esitä gravitaation suuruus Newtonin gravitaatiolain mukaisessa muodossa $G\frac{Mm}{s^2}$, missä M on maan ja m on raketin massa ja s massakeskipisteiden välinen etäisyys. Yhtälöä ei tarvitse ratkaista, mutta selvitä mitä menetelmiä saadun differentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi kurssilla on toistaiseksi esitetty (jos yhtään).

   Mallivastaus:
$$\frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} = F - G\frac{Mm}{s^2},$$
   joka voidaan kirjoittaa muotoon
$$-kv + (m_0 - kt)v' = F - G\frac{M(m_0 - kt)}{s^2}$$
   ja edelleen
$$(m_0 - kt)s'' - ks' = F - G\frac{M(m_0 - kt)}{s^2}.$$

   Tehtävän differentiaaliyhtälö on "rakettitiedettä" ja vaikea ratkaista. Kurssilla ei ole esitetty suoria menetelmiä sen ratkaisemiseksi.

   DY voidaan kirjoittaa muotoon
$$s'' - \frac{c}{m_0 - kt}s' = \frac{F}{m_0 - kt} - \frac{GM}{s^2},$$
   ja tästä linearisoitu DY
$$s'' - \frac{k}{m_0 - kt}s' = \frac{F}{m_0 - kt}$$
   osataan ratkaista kurssilla esitetyilla menetelmillä, kun sijoitetaan $s' = v$, josta $s'' = v'$. Kun linearisoidulle versiolle on löydetty jokin ratkaisu s_L, voidaan alkuperäisen DY:n ratkaisua yrittää etsiä jollakin funktion s_L sisältävällä yritteellä, mutta tämä ei kuitenkaan takaa ratkaisun löytymistä.