Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Demonstraatio 3, 7.3.2024

1. Osoita, että differentiaaliyhtälö

$$6xy + 5y^2 + (3x^2 + 10xy - 2y^2)y' = 0$$

on eksakti ja etsi sille (implisiittinen) ratkaisu.

Mallivastaus: Koska

$$\frac{\partial}{\partial y}(6xy + 5y^2) = 6x + 10y = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 10xy - 2y^2),$$

on yhtälö eksakti. Ratkaisua varten pitää löytää sellainen kahden muuttujan funktio $F(x, y)$, että $\frac{\partial F}{\partial x} = 6xy + 5y^2$ ja $\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 + 10xy - 2y^2$. Ensimmäinen yhtälö integroimalla saadaan

$$F = 3x^2y + 5y^2x + C(y),$$

missä $C(y)$ riippuu ainoastaan y:stä. Derivoimalla yllä oleva y:n suhteen saadaan

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 + 10yx + C'(y),$$

ja vertaamalla näin saatua differentiaaliyhtälössä esiintyvään lausekkeeseen päätellään

$$C'(y) = -2y^2,$$

josta $C(y) = -\frac{2}{3}y^3 + C$. Näin ollen $F(x, y) = 3x^2y + 5y^2x - \frac{2}{3}y^3 + C$, ja differentiaaliyhtälön implisiittinen ratkaisu on $F(x, y) = C_1$ (vakio).

2. Esitä yleinen ratkaisu seuraavalle DY-parille ja sellainen ratkaisu, jolle $x(0) = 1$ ja $y(0) = 2$.

$$\begin{cases} x' &= -7x + 6y \\ y' &= -8x + 7y \end{cases}$$

Mallivastaus: Kerroinmatriisin $A = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$ ominaisarvot ovat -1 ja 1 ja näihin liittyvät ominaisvektorit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Näiden perusteella yleinen ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Sijoittamalla $t = 0$ saadaan

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ c_1 + 4c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

josta voidaan ratkaista $c_1 = -2$ ja $c_2 = 1$.

3. Esitä yleinen ratkaisu DY-parille

$$\begin{cases} x' &= -7x + 6y + t \\ y' &= -8x + 7y + e^t \end{cases}$$

Mallivastaus: Homogeenisen version ratkaisu on saatu aiemmassa tehtävässä. Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^t \\ e^{-t} & 4e^t \end{pmatrix}}_{X(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{c}}$$

Vakion variointi, jossa merkitään $\boldsymbol{x} = X(t)\boldsymbol{c}(t)$ tuottaa yhtälön

$$\boldsymbol{c}'(t) = X^{-1}(t)\boldsymbol{f},$$

missä $\boldsymbol{f} = (t, e^t)^T$. Auki kirjoitettuna

$$\boldsymbol{c}'(t) = \begin{pmatrix} 4e^t & -3e^t \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{2t} + 4te^t \\ -te^{-t} + 1 \end{pmatrix},$$

josta integroimalla saadaan

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}e^{2t} + e^t(4t-4) \\ e^{-t}(t+1) + t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

DY-parin ratkaisu saadaan tämän avulla: $\boldsymbol{x} = X(t)\boldsymbol{c}(t)$.

4. Esitä yleinen ratkaisu DY-parille

$$\begin{cases} x' &= -3x + y \\ y' &= -x - y \end{cases}$$

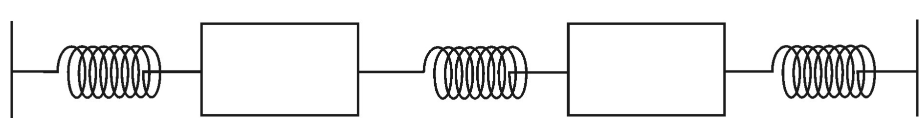
Mallivastaus: Kerroinmatriisilla $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ on kaksinkertainen ominaisarvo -2 ja tähän liittyy vain yksi ominaisvektori $(1,1)^T$. Tällöin pitää etsiä ominaisarvoon -2 liittyvä toisen kertaluvun ominaisvektori. Koska $(A+2I)^2 = O$, kelpaa tällaiseksi esim. $(1,0)^T$. DY-parin yleinen ratkaisu saadaan muodossa

$$\boldsymbol{x} = c_1 e^{-tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mikä luennolla esitetyn mukaan saadaan muotoon

$$\boldsymbol{x} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \end{pmatrix},$$

5. Kolme jousta ja kaksi massaa on kytketty kuvion osoittamalla tavalla. Etäisyydet on valittu siten, että lepotilassa systeemin jousista ei yksikään ole jännittynyt.



Hooken lain mukaan jousen aiheuttama voima siihen kiinitettyyn kappaleeseen on $F = -k\Delta x$, missä Δx on jousen poikkeama tasapainoasemastaan ja k jousivakio. Merkitään ensimmäisen massan poikkeamaa lepoasemasta x:llä ja toisen y:llä ja valitaan oikeanpuoleinen suunta positiiviseksi. Kirjoita Newtonin lain mukaiset liikeyhtälöt x:lle ja y:lle, kun jousivakiot vasemmalta oikealle ovat k_1 ja k_2 ja k_3 sekä massat m_1 ja m_2.

Ohje: Oletetaan, että massan m_1 paikka (=poikkeama tasapainotilasta) on x. Tällöin kuvion vasemmanpuolimmaisin jousi kohdistaa massaan voiman $-k_1x$. Määritä toinenkin voima joka massaan m_1 kohdistuu, olettaen että massan m_2 poikkeama tasapainotilasta on y. Huomioi, että x'' edustaa kiihtyvyyttä, joten Newtonin mekaniikan mukaan m_1x'' on massaan m_1 vaikuttavien kokonaisvoimien summa. Määritä m_2y'' samalla periaatteella.

Mallivastaus: Keskimmäisen jousen poikkeama tasapainoasemasta on $y - x$, joten yhtälöiksi saadaan $m_1x'' = -k_1x + k_2(y-x)$ ja $m_2y'' = -k_2(y-x) - k_3y$.

6. Esitä joitain tapoja jotka saattaisivat johtaa edellisen tehtävän differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun.

   Mallivastaus: DY-pari on mahdollista kirjoittaa operaattorimuotoon

$$\begin{cases} (m_1D^2 + k_1 + k_2)x & -k_2y & = 0 \\ -k_2x & (m_2D^2 + k_2 + k_3)y & = 0 \end{cases}$$

   ja ratkaisu voidaan saada tästä eliminoimalla ensin toinen funktio.

7. Olkoon x syöte ja y tuloste, joille pätee differentiaaliyhtälö

$$y'' + y' - 2y = x' + 3x$$

   Määritä systeemin siirtofunktio. Ohje: Luentoruudut

   Mallivastaus: Laskemalla Laplace-muunnokset ehdoilla $0 = y(0) = y'(0) = y''(0) = x(0) = x'(0)$ saadaan

$$s^2Y + sY - 2Y = sX + 3X,$$

   josta

$$Y = \frac{s+3}{s^2+s-2}X.$$

   Siirtofunktio on $\frac{s+3}{s^2+s-2}$.

8. Onko edellisen tehtävän systeemi stabiili? Ohje: Stabiilisuus määräytyy siirtofunktion napojen mukaan, kts. luentoruudut.

   Mallivastaus: Polynomin $s^2 + s - 2$ nollakohdat ovat -2 ja 1, joten

$$\frac{s+3}{s^2+s-2} = \frac{s+3}{(s+2)(s-1)},$$

   eikä yksikään tekijä supistu pois. Koska siirtofunktiolla on napa $1 > 0$, ei systeemi ole stabiili.

9. Selvitä onko differentiaaliyhtälön

$$y'' + y' - 2y = x' - x$$

   määrittämä systeemi stabiili.

Mallivastaus: Määrittämällä Laplace-muunnokset aiemmassa tehtävässä mainituin ehdoin saadaan

$$s^2Y + sY - 2Y = sX - X,$$

josta

$$Y = \frac{s-1}{s^2+s-2}X = \frac{s-1}{(s+2)(s-1)}X = \frac{1}{s+2}X.$$

Koska nimittäjän tekijä $s-1$ supistui pois, ei 1 ole siirtofunktion napa, vaan sen ainoa napa on $-2 < 0$. Näin ollen systeemi on stabiili.