

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Demonstraatio 4, 14.3.2024

1. Laske Z -muunnos funktiolle $x(t) = t$, kun näytteenottoväli T on kiinnitetty.
2. Määritä jonolle $x_n = na^n$ Z -muunnos. Ohje: Hyödynnä ensin muunnos jonolle a^n (luennoilla) ja kokeile derivointia z :n suhteen.
3. Määritellään $G_0 = 2$, $G_1 = 5$ ja $G_{n+2} = 5G_{n+1} - 6G_n$. Määritä jonon G_n jäsenille eksplisiittinen lauseke käyttämällä Z -muunnoksia.
4. Selitä miten funktion $x(t) = \sin(t)$ Z -muunnos voitaisiin määrittää, kun näytteenottoväli on T . Tässä tehtävässä ei tarvitse esittää tulosta, vaan menetelmä miten tulokseen voitaisiin päästä. Ohje: Eulerin kaava.
5. Oletetaan, että syötejono x_n (input) ja tulostejono y_n (output) toteuttavat yhtälön

$$y_{n+1} + 3y_n = x_n.$$

Onko systeemi stabiili? Jos ei, millainen rajoitettu syöte voisi tuottaa rajoittamattoman tulosteen? Ohje: Laske aluksi Z -muunnos puolittain ja selvitä millaisia siirtofunktion navat ovat.

6. Oletetaan, että syötejono x_n (input) ja tulostejono y_n (output) toteuttavat yhtälön

$$2y_{n+2} + 3y_{n+1} - 2y_n = x_{n+1} + 2x_n.$$

Onko systeemi stabiili?

7. Muunna DY-ryhmä

$$\begin{cases} x'' &= y'y + 3z^2 \\ y'' &= (y')^2 - 5yz' \end{cases}$$

sellaiseksi DY-ryhmäksi, jossa vasemmalla puolella esiintyy vain ensimmäisen kertaluvun derivaattoja ja oikealla puolella ei esiinny derivaattoja ollenkaan. Ohje: Määrittele uusia funktioita tunnettujen funktioiden avulla ja kasvata yhtälöiden määrää.

8. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

Ohje: Sijoita $z = \frac{y}{x}$, mutta laske tätä varten y' yhtälöstä $y = zx$ käyttämällä tulon derivointisääntöä. Huomaa, että y ja z ovat molemmat funktioita, x muuttuja.

9. Muunna differentiaaliyhtälö

$$y' = \frac{-x - y - 1}{2x + 2y + 3}.$$

separoituvaksi sijoituksella $z = x + y$. Ohje: Määritä ensin y' . Kts. myös edellisen tehtävän ohje.