Mika Hirvensalo

Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt 2024

Sisällys

1 Differentiaaliyhtälöt (DY:t) . . . 5
1.1 Yksinkertaiset DY:t . . . 5
1.2 Lineaariset DY:t . . . 6
1.2.1 Vakiokertoimiset lineaariset DY:t . . . 7
1.2.2 Yksittäisratkaisun etsiminen yritteellä . . . 9
1.2.3 Ratkaisun etsiminen Laplace-muunnoksilla . . . 10
1.2.4 Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen DY . . . 12
1.2.5 Toisen kertaluvun lineaariset DY:t . . . 14
1.2.6 Sarjaratkaisut . . . 15
1.3 Separoituvat DY:t . . . 19
1.4 Eksaktit DY:t . . . 21
1.5 Lineaarisista vakiokertomisista DY-ryhmistä . . . 23
1.6 Autonomisista DY-pareista . . . 27
1.7 Differentiaaliyhtälöiden numeerisesta ratkaisemisesta . . . 29
1.8 Sekalaisia menetelmiä . . . 31
1.8.1 Sijoitukset $\frac{y}{x}$ ja $ax + by$ . . . 31
1.8.2 Bernoullin DY . . . 31
1.8.3 Käänteisfunktioon siirtyminen . . . 32
1.8.4 Muuttujan vaihtaminen . . . 32
1.8.5 Yhtälö $y'' = f(y)$ . . . 33

Huomioita sisällöstä: Insinöörimatematiikan opintokokonaisuuden tarkoitus on esittää perustiedot valikoiduista matematiikan työkaluista, joita sovelletaan teknillisillä aloilla.

Määritelmänsä perusteella funktion derivaatta edustaa funktion kuvaaman ilmiön hetkellistä muutosnopeutta. Tämän vuoksi on ymmärrettävää, että luonnonilmiöitä kuvattaessa on usein käytettävä yhtälöitä, joissa esiintyy sekä funktio että sen derivaatta tai useampikertaisia derivaattoja, siis *differentiaaliyhtälöitä*

Differentiaaliyhtälöitä on käytetty mallintamaan fysikaalisia ilmiöitä aina Newtonin ajoista asti. Niitä käytetään klassisen mekaniikan, sähkömagnetismin, kvanttimekaniikan ja suhteellisuusteorian matemaattisessa esityksessä. Näiden lisäksi differentiaaliyhtälöitä käytetään myös biologisissa, kemiallisissa ja taloustieteellisissä malleissa.

Luku 1
Differentiaaliyhtälöt (DY:t)

Differentiaaliyhtälön käsitettä luonnehditaan seuraavasti:

Määritelmä 1. Differentiaaliyhtälöllä (DY) tarkoitetaan yhtälöä $F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, missä F on lauseke, joka sisältää muuttujan t, tuntemattoman funktion $y = y(t)$ sekä tämän yhden- tai useammankertaisia derivaattoja y', y'' …, $y^{(n)}$. Lukua n kutsutaan differentiaaliyhtälön *kertaluvuksi*.

Erityisesti differentiaaliyhtälöiden yhteydessä jätetään usein muuttuja merkitsemättä ja siis merkintöjen $y(t)$, $y'(t)$, …, $y^{(n)}(t)$ sijaan käytetään merkintöjä y, y', …, $y^{(n)}$. Muuttujan merkintä t x:n sijaan on perua yleisimmistä fysikaalisista sovelluksista, joissa muuttujana toimii aika.

Määritelmä 2. Differentiaaliyhtälön ratkaisun kuvaajaa kutsutaan *integraalikäyräksi*. Yleensä integraalikäyriä on ääretön määrä, mutta yksikäsitteiseen ratkaisuun voidaan silti yleensä päätyä *reunaehdoilla* $y(0) = c_0$, $y'(0) = c_1$, …, $y^{(n)}(0) = c_n$.

1.1 Yksinkertaiset DY:t

Yksinkertaiseksi differentiaaliyhtälöksi sanotaan sellaista, jonka ratkaiseminen on pelkkä integrointitehtävä.

Esimerkki 1. Differentiaaliyhtälön $y' = 2t - 1$ ratkaiseminen palautuu pelkäksi antiderivaatan etsimiseksi: Yleinen ratkaisu on muotoa $y = t^2 - t + C$, missä C on jokin vakio.

Yksinkertaisille differentiaaliyhtälöille on tyypillistä se, että etsittävästä funktiosta esiintyy vain derivaatta, eikä itse funktiota. On huomattava, että toisinaan voidaan hankalamman näköinen differentiaaliyhtälö kirjottaa yksinkertaiseen muotoon (vrt. radioaktiivisen hajoamisen differentiaaliyhtälö kurssilla Differentiaali- ja integraalilaskenta): differentiaaliyhtälö

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{d}{dt} \ln N = -\lambda,$$

joka on yksinkertainen funktion $\ln N$ suhteen.

1.2 Lineaariset DY:t

Määritelmä 3. Muotoa

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t) \tag{1.1}$$

olevaa differentiaaliyhtälöä kutsutaan *lineaariseksi*. Jos a_n, a_{n-1}, …, a_1 ja a_0 ovat vakioita, sanotaan yhtälöä *vakiokertoimiseksi* lineaariseksi differentiaaliyhtälöksi. Jos $b(t)$ on nollafunktio, sanotaan lineaarista differentiaaliyhtälöä

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{1.2}$$

homogeeniseksi.

Lause 1. *Olkoon C^n n kertaa derivoituvien funktioiden joukko. Määritellään funktioiden yhteenlasku ja skalaarimonikerta kuten aiemmin. Tällöin homogeenisen differentiaaliyhtälön (1.2) ratkaisut muodostavat avaruuden C^n aliavaruuden.*

Todistus. Olkoon $V \subseteq C^n$ differentiaaliyhtälön (1.2) ratkaisujen joukko ja y_1, $y_2 \in V$. Derivoinnin lineaarisuuden perusteella

$$\begin{aligned} & a_n(\alpha y_1 + \beta y_2)^{(n)} + a_{n-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)^{(n-1)} + \ldots + a_1(\alpha y_1 + \beta y_2)' + a_0(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ = \; & \alpha(a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \ldots + a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) \\ + \; & \beta(a_n y_2^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \ldots + a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

siis myös $\alpha y_1 + \beta y_2 \in V$. Näin ollen V on vektoriavaruuden C^n aliavaruus.

Seuraava lause esittää luonnehdinnan lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisujoukosta.

Lause 2. *Oletetaan että funktiot a_i ja b ovat jatkuvia. Silloin n:nen kertaluvun homogeenisella differentiaaliyhtälöllä (1.2) on aina n* lineaarisesti riippumatonta *ratkaisua y_1, y_2, …, y_n, joiden lineaarikombinaationa saadaan kaikki ratkaisut:*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n.$$

Epähomogeenisen differentiaaliyhtälön (1.1) kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + y_0,$$

missä y_1, …, y_n ovat homogeenisen differentiaaliyhtälön (1.2) riippumattomat ratkaisut ja y_0 jokin yksittäinen epähomogeenisen differentiaaliyhtälön (1.1) ratkaisu.

Todistus. Sivuutetaan.

Huomautus 1. Edellinen lause on analoginen sen tuloksen kanssa, että lineaarisen yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kaikki ratkaisut voidaan kirjoittaa muodossa $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_k\mathbf{c}_k + \mathbf{x}_0$, missä c_i ovat mitä hyvänsä lukuja, $\mathbf{x}_i$ ovat lineaarisesti riippumattomia vastaavan homogeenisen yhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisuja, ja $\mathbf{x}_0$ on alkuperäisen yhtälön yksittäisratkaisu (kts. Lineaarialgebra).

Lineaarialgebran kurssilla käytettiin pääasiassa Gaussin-Jordanin menetelmää, jolla voitiin todeta avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreiden lineaarinen riippumattomuus tai riippuvuus. Menetelmä ei välttämättä sovellu, mikäli tarkasteltava vektoriavaruus on ääretönulotteinen (kuten C^n) tai mikäli ei ole selvää, miten koordinaattivektorit sen alkioille määritetään.

Todetaan siksi lineaarinen riippumattomuus erityistä tyyppiä oleville funktiojoukoille. Yleisesti ottaen vektoreille ei kuitenkaan voida määritellä äärettömiä summia (sarjoja), joten äärettömiä joukkoja varten tulee asettaa seuraava määritelmä.

Määritelmä 4. Ääreton vektorijoukko on lineaarisesti riippumaton, jos sen jokainen äärellinen osajoukko on sellainen.

Lause 3. *Polynomijoukko* $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ *on lineaarisesti riippumaton.*

Todistus. Valitaan jokin äärellinen osajoukko $\{x^{n_1}, \dots, x^{n_k}\}$, ja muodostetaan lineaarikombinaatio $P(x) = c_{n_1}x^{n_1} + \dots + c_{n_k}x^{n_k}$. Mikäli tämä lineaarikombinaatio on nollafunktio, on Taylorin sarjoja koskevan tuloksen mukaan $c_{n_1} = \dots = c_{n_k} = 0$.

Lause 4. *Funktiojoukko* $\{e^{\lambda x} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ *on lineaarisesti riippumaton.*

Todistus. Valitaan jokin äärellinen osajoukko

$$\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_k x}\} \tag{1.3}$$

ja osoitetaan induktiolla k:n suhteen, että muotoa (1.3) oleva joukko on lineaarisesti riippumaton.

Jos $k = 1$, on tarkasteltava joukko muotoa $\{e^{\lambda_1 x}\}$ ja lineaarisesti riippumaton, sillä joukon ainoa alkio ei ole nollafunktio. Oletetaan sitten, että jollekin arvolle $k-1$ muotoa (1.3) oleva on lineaarisesti riippumaton, ja osoitetaan, että näin on myös arvolle k.

Oletetaan, että

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_{k-1}e^{\lambda_{k-1}x} + c_k e^{\lambda_k x} = 0.$$

Jakamalla $e^{\lambda_k x}$:llä saadaan

$$c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_k)x} + \dots + c_{k-1}e^{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x} + c_k = 0,$$

josta derivoimalla nähdään, että

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k)e^{(\lambda_1-\lambda_k)x} + \dots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)e^{\lambda_{k-1}-\lambda_k} = 0.$$

Induktio-oletuksen perusteella $c_1(\lambda_1 - \lambda_k) = \dots = c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$, josta $c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$ ja edelleen $c_k = 0$.

1.2.1 Vakiokertoimiset lineaariset DY:t

Vakiokertoimisella differentiaaliyhtälöllä tarkoitetaan muotoa

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y + a_0 y = b \tag{1.4}$$

olevaa differentiaaliyhtälöä, jossa kerroinfunktiot a_i ovat vakioita, mutta funktion b ei tarvitse olla vakio. Tätä muotoa olevaan differentiaaliyhtälöön voidaan tietenkin myös soveltaa lausetta 2, jonka mukaan yhtälön (1.4) kaikki ratkaisut saadaan määrittämällä yksi ainoa (yksittäisratkaisu) y_0 yhtälölle 1.4 ja yhdistämällä se homogeenisen yhtälön

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y + a_0 y = 0 \tag{1.5}$$

ratkaisujoukkoon, jonka lauseen 2 mukaan generoi n lineaarisesti riippumatonta ratkaisua $y_1, \dots, y_n$.

Vakiokertoimisen, homogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaiseminen on melko helppoa, sillä suoraan laskemalla voidaan todeta, että yhtälöllä

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0 \tag{1.6}$$

on aina muotoa $y = e^{\lambda x}$ oleva ratkaisu. Tätä varten lasketaan derivaatat $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, …, $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ ja sijoitetaan nämä yhtälöön (1.6):

$$a_n\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_0 e^{\lambda x} = 0,$$

mistä $e^{\lambda x}$:llä jakaminen antaa

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0. \tag{1.7}$$

Yhtälöllä (1.7), jota kutsutaan differentiaaliyhtälön (1.6) *karakteristiseksi yhtälöksi*, on algebran peruslauseen nojalla korkeintaan $k \le n$ erisuurta ratkaisua $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, joista jokaisesta saadaan alkuperäisen yhtälön (1.6) ratkaisu $e^{\lambda_i x}$. Jos juuria λ_i on tarkalleen n, ovat tässä lauseen 4 mukaan kaikki alkuperäisen yhtälön *riippumattomat ratkaisut*, kun taas siinä tapauksessa että $k < n$, on differentiaaliyhtälöllä (1.6) myös muita riippumattomia ratkaisuja.

Voidaan osoittaa, että jos λ_i on karakteristisen yhtälön j-kertainen juuri, niin differentiaaliyhtälöllä (1.6) on ratkaisut

$$e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, x^2 e^{\lambda_i x}, \ldots x^{j-1} e^{\lambda_i x}.$$

Riippumattomista ratkaisuista $y_1, \ldots, y_n$ saadaan kaikki ratkaisut näiden lineaarikombinaatioina

$$C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n.$$

Tarkastellaan erityisesti sellaista ratkaisua $e^{\lambda x}$, jossa $\lambda = \alpha + i\beta$ on kompleksiluku. Mikäli karakteristinen yhtälö on reaalikeroiminen, on myös $\overline{\lambda}$ yhtälön ratkaisu, ja tällöin kompleksiset ratkaisut $e^{\lambda x}$ ja $e^{\overline{\lambda} x}$ voidaan korvata reaalisilla ratkaisuilla $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Tämä johtuu siitä, että tällöin voidaan kirjoittaa $e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{\pm i\beta x}$, mikä edelleen Eulerin kaavan perusteella on muotoa

$$e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i \sin\beta x).$$

Esimerkki 2. Toisen kertaluvun homogeenisen differentiaaliyhtälön

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{1.8}$$

ratkaisut voidaan löytää seuraavasti: Edellämainitun perusteella yhtälöllä on muotoa $y = e^{\lambda x}$ oleva ratkaisu. Tällöin $y' = \lambda e^{\lambda x}$ ja $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, ja nämä sijoittamalla saadaan karakteristiseksi yhtälöksi

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

jonka ratkaisut ovat $\lambda = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b}$. Yhtälön käsittely voidaan jakaa kolmeen osaan:

1) $D = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b > 0$. Tällöin yhtälöllä (1.8) on kaksi ratkaisua $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, missä $\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{D}$ ja $\lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{D}$.

2) $D = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b < 0$. Tällöin yhtälöllä on kaksi kompleksista ratkaisua $e^{(\alpha \pm i\beta)x}$, missä $\alpha = -\frac{a}{2}$ ja $\beta = \sqrt{D}$, joita vastaavat reaaliratkaisut $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

3) $D = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = 0$ Tällöin yhtälöllä on ratkaisu $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$. Voidaan todeta, että tällöin myös $y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}$ on myös ratkaisu, joka on edellisestä riippumaton.

Jokaisessa tapauksessa yhtälön kaikki ratkaisut saadaan riippumattomien ratkaisujen lineaarikombinaationa

$$C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Yksikäsitteisen ratkaisun määräävät reunaehdot.

Esimerkki 3. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$y'' + 4y = 0. \tag{1.9}$$

Yleinen ratkaisu on muotoa $y = e^{\lambda t}$, josta $y' = \lambda e^{\lambda t}$ ja $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$, ja sijotus differentiaaliyhtälöön antaa

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 4e^{\lambda t} = 0,$$

mistä $\lambda^2 = -4$ ja siis $\lambda = \pm 2i$, josta saadaan kompleksiset ratkaisut $e^{\pm i2x}$, joita vastaavat reaaliset ratkaisut ovat $y_1(x) = \cos 2x$ ja $y_2(x) = \sin 2x$.

Yhtälön (1.9) yleinen (reaalinen) ratkaisu on siis

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Reunaehtojen $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ kiinnittämä ratkaisu saadaan laskemalla

$$y'(x) = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x,$$

sekä sijoittamalla $x = 0$ kumpaankin yhtälöön: $y_0 = y(0) = C_1$ ja $y_1 = y'(0) = 2C_2$.

Esimerkki 4. Ratkaistaan aiemmasta kurssista tuttu radioaktiivisen hajoamisen differentiaaliyhtälö

$$y' = -\lambda y, \tag{1.10}$$

missä λ on vakio ja alkuehtona toimii $y(0) = y_0$. Käytetään yritettä $y = e^{\alpha t}$, jolloin $y' = \alpha e^{\alpha t}$ ja sijoittamalla yhtälöön saadaan

$$\alpha e^{\alpha t} = -\lambda e^{\alpha t},$$

josta jakamalla saadaan yhtälö $\alpha = -\lambda$. Täten yhtälön yksi ratkaisu on $y_1 = e^{-\lambda t}$, ja kaikki ratkaisut saadaan tämän skalaarimonikertoina

$$y = Ce^{-\lambda t}.$$

Vakio C voidaan kiinnittää alkuehdon perusteella: $y_0 = Ce^{-\lambda \cdot 0} = C$.

1.2.2 Yksittäisratkaisun etsiminen yritteellä

Vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x) \tag{1.11}$$

ratkaisujen saamiseksi pitää siis ensin etsiä homogeenisen DY:n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

ratkaisut $y_1, \ldots, y_n$ ja kuten edellä on nähty, nämä voidaan löytää käyttämällä yritettä $y = e^{\lambda x}$. Tämän jälkeen pitää löytää jokin DY:n (1.11) yksittäinen ratkaisu y_0. Yksittäisratkaisun löytämiseksi on käytettävissä kaksi menetelmää, yrite ja Laplace-muunnos. Laplace-muunnokset ja niiden perusominaisuudet esitellään erillisessä liitteessä.

Yritemenetelmä koostuu seuraavista periaatteista:

- Jos $b(x)$ on astetta n oleva polynomi, yritä astetta n olevaa polynomia.
- Jos $b(x) = ae^{kx}$ (tai $a\cos kx$ tai $a\sin kx$), yritä ratkaisua $y = Ae^{kx}$ (tai $A_1 \cos kx + A_2 \sin kx$).
- Jos b on edellämainittujen tulo, yritä samanmuotoista ratkaisua.
- Jos b on edellämainittujen summa, tee yrite jokaiselle summattavalle erikseen.
- Jos yrite sisältää termin, joka on homogeenisen DY:n ratkaisu, kerro se muuttujalla. Toista tarpeen vaatiessa.

Esimerkki 5. Etsitään DY:n $y' + y = e^{-t}$ kaikki ratkaisut. Aloitetaan homogeenisen yhtälön $y' + y = 0$ ratkaisuista, jotka saadaan sijoittamalla $y = e^{\lambda t}$. Näin ollen $\lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0$, josta $\lambda = -1$.

Homogeenisen yhtälön ratkaisut ovat täten muotoa $y = ce^{-t}$ ja yksittäisratkaisun löytämiseksi valitaan yrite $y = Ae^{-t}$. Koska tämä on homogeenisen yhtälön ratkaisu, muutetaan yrite muotoon $y = Ate^{-t}$. Tällöin

$$y' = Ae^{-t} - Ate^{-t}$$

ja sijoittamalla yhtälöön saadaan

$$Ae^{-t} - Ate^{-t} + Ate^{-t} = e^{-t} \Leftrightarrow A = 1.$$

Näin ollen yleinen ratkaisu on $y = ce^{-t} + te^{-t}$.

Esimerkki 6. Ratkaistaan seuraavat differentiaaliyhtälöt:

- $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 1$
- $y'' + 3y' + 2y = \sin x$
- $y'' + 3y' + 2y = \sinh x$

1.2.3 Ratkaisun etsiminen Laplace-muunnoksilla

Myös Laplace-muunnokset (kts. erillinen liite Laplace-muunnoksista) tarjoavat työkalun vakiokertoimisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi. Niiden avulla voidaan muuntaa muotoa (1.11) oleva differentiaaliyhtälö *algebralliseksi* yhtälöksi, josta voidaan ratkaista tuntematon funktio $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$. Etsitty funktio $y(t)$ saadaan tämän jälkeen käänteisellä Laplace-muunnoksella. Yleensä oletetaan, että y on oikealta jatkuva nollassa.

Esimerkki 7. Ratkaistaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$y'' + 4y = t \tag{1.12}$$

alkuehdoilla $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 2$. Nyt $\mathcal{L}[y''] = s^2Y(s) - s - 2$ ja (1.12) saadaan siis Laplace-muunnoksilla muotoon

$$s^2Y(s) - s - 2 + 4Y(s) = \frac{1}{s^2},$$

mistä voidaan ratkaista

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right)$$

Originaalifunktio saadaan taulukosta: $y(t) = \cos 2t + \sin 2t + \frac{1}{4}(t - \frac{1}{2}\sin 2t) = \cos 2t + \frac{7}{8}\sin 2t + \frac{1}{4}t$.

Edellinen esimerkki sisälsi perustelemattomia oletuksia, kuten sen, että alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisu on originaalifunktio ja nollassa jatkuva oikealta. Myöskään ei tarkasteltu sitä, missä alueessa Laplace-muunnos oli määritelty. Sovellusten kannalta näillä heikkouksilla ei kuitenkaan ole yleensä merkitystä, sillä kun differentiaaliyhtälön ratkaisu on saatu, voidaan sen oikeellisuus tarkistaa ja määrittelyjoukko löytää yleensä melko helposti. Ratkaistaessa differentiaaliyhtälöitä Laplace-muunnosten avulla tehdään ratkaisusta yleensä äskeisen esimerkin oletukset.

Esimerkki 8. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$y' - 3y = 8e^{2t}$$

alkuehdolla $y(0) = 2$. Laplace-muunnokset laskemalla saadaan tällöin

$$sY(s) - 2 - 3Y(s) = \frac{8}{s-2},$$

mistä voidaan ratkaista $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2s+4}{(s-3)(s-2)}.$$

Näin saadulle lausekkeelle löytyy osamurtohajotelma (kts. Erillinen liite osamurtohajotelmista):

$$\frac{2s+4}{(s-3)(s-2)} = \frac{10}{s-3} - \frac{8}{s-2},$$

minkä avulla originaalifunktio voidaan määrätä:

$$y(t) = 10e^{3t} - 8e^{2t}.$$

Esimerkki 9. Ratkaistaan

$$y'' + 3y' - 4y = e^{3t}$$

alkuehdoilla $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$. Laplace-muunnoksilla saadaan

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 3(sY(s) - 2) - 4Y(s) = \frac{1}{s-3},$$

mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$(s^2 + 3s - 4)Y(s) - 2s - 7 = \frac{1}{s-3}$$

ja edelleen

$$Y(s) = \frac{2s^2 + s - 20}{(s^2 + 3s - 4)(s-3)} = \frac{2s^2 + 2 - 20}{(s-1)(s+4)(s-3)}$$

Tälle löytyy osamurtohajotelma

$$Y(s) = \frac{17}{10}\frac{1}{s-1} + \frac{8}{35}\frac{1}{s+4} + \frac{1}{14}\frac{1}{s-3},$$

josta voidaan määrätä originaalifunktio:

$$y(t) = \frac{17}{10}e^{t} + \frac{8}{25}e^{-4t} + \frac{1}{14}e^{3t}.$$

Esimerkki 10. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$y'' + y = \cos t$$

alkuehdoilla $y(0) = y'(0) = 0$. Laplace-muunnokset laskemalla saadaan

$$s^2Y(s) + Y(s) = \frac{s}{s^2+1},$$

mistä

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}[\sin](s)\mathcal{L}[\cos](s) = \mathcal{L}[\sin * \cos](s),$$

jolloin siis $y(t) = (\sin * \cos)(t) = \frac{1}{2}t\sin t$.

Tämän esimerkin originaalifunktio $y(t)$ voidaan selvittää myös suoraan taulukosta.

Laplace-muunnosten sovellusalue ulottuu myös lineaarisia differentiaaliyhtälöitä kauemmaksi, kuten seuraavasta esimerkistä ilmenee.

Esimerkki 11. Ratkaistaan differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} y' + 4y + 4z = 0 \\ z' + 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

alkuehdoilla $y(0) = 3$, $z(0) = 15$. Laplace-muunnettu pari on muotoa

$$\begin{cases} sY(s) - 3 + 4Y(s) + 4Z(s) = 0 \\ sZ(s) - 15 + 2Y(s) + 6Z(s) = 0, \end{cases}$$

mistä voidaan ratkaista

$$\begin{cases} Y(s) = \frac{3s-42}{s^2+10s+16} = -\frac{8}{s+2} + \frac{11}{s+8} \\ Z(s) = \frac{15s+54}{s^2+10s+16} = \frac{4}{s+2} + \frac{11}{s+8} \end{cases}$$

Vastaavat originaalifunktiot ovat

$$\begin{cases} y(t) = -8e^{-2t} + 11e^{-8t} \\ z(t) = 4e^{-2t} + 11e^{-8t}. \end{cases}$$

Laplace-muunnokset eivät kuitenkaan ole yksinkertaisin tapa ratkaista tämänlaisia DY-pareja. Laskennallisesti parempaan menetelmään tutustutaan myöhemmin.

Huomautus 2. Seuraava tapa ratkaista vakiokertoiminen lineaarinen DY saattaa olla pelkkiä Laplace-muunnoksia tehokkaampi:

- Etsitään kaikki homogeenisen yhtälön ratkaisut eksponenttimuotoisella yritteellä.
- Etsitään yksittäisratkaisu käyttämällä Laplace-muunnoksia ja reunaehtoja, jotka on valittu sopivasti helpottamaan laskutoimituksia. Valinta $y(0) = y'(0) = y''(0) = \ldots = 0$ on usein käyttökelpoinen.

1.2.4 Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen DY

Aiemmin on käsitelty vain vakiokertoimisia lineaarisia differentiaaliyhtälöitä. Näitä esiintyykin varsin tyypillisesti piiritekniikassa, mutta myös ei-vakiokertoimisia esintyy hyvin yleisesti erityisesti fysikaalisten ilmiöiden mallinnoksissa.

Yleisiä ratkaisumenetelmiä ei-vakiokertoimisille lineaarisille differentiaaliyhtälöille on kuitenkin varsin vähän, mutta 1. kertaluvun lineaariselle DY:lle tunnetaan täydellinen ratkaisumenetelmä.

Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{1.13}$$

ja tämän ratkaisemiseksi tarkastellaan aluksi *homogenisoitua* yhtälöä

$$y' + a(x)y = 0, \tag{1.14}$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{y'}{y} = -a(x). \tag{1.15}$$

Koska $\frac{d}{dx}\ln y = \frac{y'}{y}$, saadaan (1.15) muotoon

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}\Big(-\int a(x)\,dx\Big),$$

josta puolestaan

$$\ln y = -\int a(x)\,dx + C.$$

Näin ollen homogeenisen yhtälön ratkaisu on

$$y_H = e^C e^{-\int a(x)\,dx},$$

missä C voidaan valita vapaasti. Jos merkitään $e^C = C_1$, saadaan muoto

$$y_H = C_1 e^{-\int a(x)\,dx},$$

missä C_1 on vapaasti valittava vakio.

Esimerkki 12. Differentiaaliyhtälö $xy' + y = 0$ voidaan kirjoittaa homogeenisen differentiaaliyhtälön muotoon $y' + \frac{1}{x}y = 0$, jonka yleinen ratkaisu on

$$y(x) = Ce^{-\int \frac{1}{x}\,dx} = Ce^{-\ln x} = \frac{C}{x}.$$

Alkuperäisen (epähomogeenisen) differentiaaliyhtälön (1.13) ratkaisu saadaan menettelyllä, jota kutsutaan *vakion varioinniksi*. Vakion variointissa käytetään lähtökohtana homogenisoidun differentiaaliyhtälön (1.14) ratkaisua y_H, merkitään $y = C(x)y_H(x)$ ja sijoitetaan näin saatu uusi funktio alkuperäiseen yhtälöön, ja ratkaistaan funktio $C(x)$.

Aluksi todetaan, että $y' = C'y_H + Cy'_H$, joten sijoitus antaa

$$C'y_H + Cy'_H + aCy_H = b.$$

Koska y_H oletettiin homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisuksi, on $Cy'_H + aCy_H = C(y'_H + ay_H) = 0$ ja siis päädytään yhtälöön $C'y_H = b$, josta josta C voidaan ratkaista integroimalla:

$$C(x) = \int \frac{b(x)}{y_H(x)}\,dx + B$$

Tällöin siis alkuperäisen differentiaaliyhtälön (1.13) ratkaisu on

$$y(x) = By_H(x) + y_H(x)\int \frac{b(x)}{y_H(x)}\,dx$$

missä

$$y_H(x) = e^{-\int a(x)\,dx}.$$

Esimerkki 13. Ratkaistaan $y' + 2xy = x$. Tarkastellaan aluksi homogenisoitua yhtälöä $y' + 2xy = 0$, joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{y'}{y} = -2x, \tag{1.16}$$

josta $\ln y = -x^2$; tällöin siis $y_H = e^{-x^2}$ on eräs homogenisoidun yhtälön ratkaisu. Alkuperäisen yhtälön ratkaisujen saamiseksi suoritetaan vakion variointi:

$$y(x) = C(x)y_H(x) = C(x)e^{-x^2},$$

mistä nähdään, että $y' = C'e^{-x^2} + Ce^{-x^2}(-2x) = C'y_H - 2xy_HC$. Sijoittamalla tämä alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$C'y_H - 2xy_HC + 2xCy_H = x,$$

mikä voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$C'(x)y_H(x) = x.$$

Tästä funktiolla $y_H(x) = e^{-x^2}$ jakamalla saadaan differentiaaliyhtälö $C'(x) = xe^{x^2}$. Funktio $C(x)$ saadaan tästä integroimalla

$$C(x) = \int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + B.$$

Alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisu on siis muotoa

$$y(x) = C(x)y_H(x) = (\frac{1}{2}e^{x^2} + B)e^{-x^2} = \frac{1}{2} + Be^{-x^2},$$

missä B on vakio.

Esitetään vielä yhteenveto ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{1.17}$$

ratkaisemiseksi. Menetelmä jakautuu kahteen vaiheeseen, joista ensimmäinen on yhtälön (1.17) *homogeninointi* ja homogeenisen yhtälön ratkaisu. Homogenisointi merkitsee funktion $b(x)$ korvaamista nollafunktiolla, ja ratkaisu homogeeniselle yhtälölle saadaan jakamalla y:llä ja huomaamalla, että logaritmin derivointisäännön perusteella voidaan kirjottaa $\frac{y'}{y} = D\ln y$. Tällöin homogeenisen yhtälön ratkaisu palautuu integrointitehtävään, kuten aiemmin on todettu. Kun homogeenisen yhtälön yksi ratkaisu y_H on saatu (tällöin myös Cy_H, missä C on vakio, on homogeenisen yhtälön ratkaisu), siirrytään vaiheeseen, joka tunnetaan nimellä *vakion variointi*. Tämä merkitsee sitä, että homogeenisen yhtälön ratkaisussa Cy_H vakio C korvataan funktiolla $C(x)$. Tämän jälkeen sijoitetaan $y = C(x)y_H$ alkuperäiseen differentiaaliyhtälöön. Kun otetaan huomioon, että $y' = C'(x)y_H + C(x)y_H'$, voidaan todeta että sijoitus tuottaa (sievennysten jälkeen) yhtälön, josta $C(x)$ voidaan ratkaista integroimalla.

1.2.5 Toisen kertaluvun lineaariset DY:t

Toisen kertaluvun lineaariselle differentiaaliyhtälölle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x), \tag{1.18}$$

ei ole olemassa integrointiin perustuvaa yleistä ratkaisumenetelmää edes homogeenisessa tapauksessa $c(x) = 0$. Tämä on harmillinen puute sovellusten kannalta, sillä suuri osa fysikaalisten ilmiöiden mallinnuksesta perustuu toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöihin. Toisaalta näitä on tutkittu jo Newtonin päivistä asti ja siksi tunnetaan lukuisia erikoistapauksia, jotka osataan ratkaista.

Toisen kertaluvun lineaarisia differentiaaliyhtälöitä koskee myös yleinen tulos: Jos lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja on löydetty kaksi, saadaan näiden lineaarikombinaatioina kaikki homogeenisen yhtälön ratkaisut.

Esimerkki 14. Voidaan todeta, että $y_1(x) = x$ ja $y_1(x) = \frac{1}{x}$ ovat molemmat differentiaaliyhtälön

$$x^2y'' + xy' - y = 0 \tag{1.19}$$

ratkaisuja. Nämä ratkaisut ovat myös (lineaarisesti) riippumattomat, sillä jos kaikilla x:n arvoilla on $C_1x + C_2\frac{1}{x} = 0$, on $C_1x^2 + C_2 = 0$, joten $C_1 = C_2 = 0$. Tällöin yhtälön (1.19) yleinen ratkaisu on siis muotoa $C_1x + C_2\frac{1}{x}$.

Toisen kertaluvun lineaariselle differentiaaliyhtälölle voidaan toisinaan löytää jokin ratkaisu pelkästään arvaamalla tai kokeilemalla. Mikäli yksikin ratkaisu löytyy homogeeniselle versiolle, voidaan tämän jälkeen ainakin periaatteessa löytää kaikki ratkaisut.

Lause 5. *Jos y_1 on jokin differentiaaliyhtälön*

$$y'' + ay' + by = 0$$

tunnettu ratkaisu, voidaan kaikki differentiaaliyhtälön

$$y'' + ay' + by = c$$

ratkaisut löytää (ainakin periaatteessa).

Todistus. Merkitään $y = y_1v$, jolloin $y' = y_1'v + y_1v'$ ja $y'' = y_1''v + y_1'v' + y_1'v' + y_1v'' = y_1''c + 2y_1'v' + y_1v''$ ja sijoitus yhtälöön

$$y'' + ay' + by = c$$

antaa

$$\begin{aligned}
& y_1''v + 2y_1'v' + y_1v'' + a(y_1'v + y_1v') + by_1v = c \\
\iff\ & y_1v'' + 2y_1'v' + ay_1v' + (y_1'' + ay_1' + by_1)v = c \\
\iff\ & y_1w' + (ay_1 + 2y_1')w = c,
\end{aligned}$$

missä viimeisellä rivillä on merkitty $w = v'$. Viimeksi saatu yhtälö on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö funktion w suhteen, joten se voidaan periaatteessa ratkaista ja lopuksi v saadaan integroimalla yhtälö $v' = w$.

Esimerkki 15. Olkoon r vakio ja $y = y(t)$ muuttujan t funktio. Etsitään differentiaaliyhtälön

$$y'' - 2ry' + r^2 y = t \tag{1.20}$$

ratkaisut ilman Laplace-muunnoksia. Sijoitetaan $y = e^{\lambda t}$ homogenisoituun yhtälöön

$$y'' - 2ry' + r^2 y = 0,$$

jolloin saadaan

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - 2r\lambda e^{\lambda t} + r^2 e^{\lambda t} = 0,$$

ja eksponenttifunktio jakamalla $\lambda^2 - 2r\lambda + r^2 = 0$, jonka ainoa ratkaisu on $\lambda = r$.

Sijoitus $y = e^{rt}v$ antaa $y' = re^{rt}v + e^{rt}v'$ ja $y'' = r^2e^{rt}v + 2re^{rt}v' + e^{rt}v''$. Sijoittamalla nämä yhtälöön (1.20) saadaan

$$r^2e^{rt}v + 2re^{rt}v' + e^{rt}v'' - 2r^2e^{rt}v - 2re^{rt}v' + r^2e^{rt}v = t,$$

joka sievenee muotoon

$$v'' = te^{-rt}.$$

Tästä saadaan ensin $v' = -\frac{t}{r}e^{-rt} - \frac{1}{r^2}e^{-rt} + C_1$ ja toiseen kertaan integroimalla

$$v = \frac{t}{r^2}e^{-rt} + \frac{2}{r^3}e^{-rt} + C_1t + C_2.$$

Lopuksi

$$y = e^{rt}v = \frac{t}{r^2} + \frac{2}{r^3} + C_1te^{rt} + C_2e^{rt}. \tag{1.21}$$

Voidaan todeta, että te^{rt} ja e^{rt} ovat lineaarisesti riippumattomat homogeenisen yhtälön ratkaisut ja että $\frac{t}{r^2} + \frac{2}{r^3}$ on yhtälön (1.20) yksittäisratkaisu. Lauseke (1.21) sisältää siis *kaikki* differentiaaliyhtälön (1.20) ratkaisut.

1.2.6 Sarjaratkaisut

Aiemmin tässä luvussa on todettu, että melko harvoille differentiaaliyhtälötyypeille on olemassa yleistä ratkaisumenetelmää. Sarjaoppi tarjoaa mahdollisuuden ratkaisujen löytämiseen joissakin sellaisissa tapauksissa, joissa aiemmat menetelmät eivät toimi.

Luonnontieteissä, erityisesti fysiikassa erityisen tärkeitä ovat toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x),$$

joille ei kuitenkaan ole olemassa yleistä ratkaisumenetelmää. Aiemmin kuitenkin huomattiin, että jos vastavalle homogeeniselle yhtälölle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

löytyy jokin ratkaisu, niin alkuperäisen yhtälön kaikki ratkaisut voidaan löytää. Tällöin homogeenisen yhtälön ratkaisua voidaan etsiä merkitsemällä tuntematonta funktiota y potenssisarjalla

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots,$$

kehittämällä $a(x)$ ja $b(x)$ sarjoiksi, ja selvittämällä näin minkälainen on jono $a_0, a_1, a_2, \dots$.

Esimerkki 16. Valon diffraktioon liittyvä *Airyn* differentiaaliyhtälö

$$y'' + xy = 0$$

on muodoltaan yksinkertainen, mutta mikään kurssilla aiemmin esitetty ratkaisumenetelmä ei siihen pysty.

Valitaan alkuehdoiksi $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 1$ ja merkitään

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

jolloin alkuehdot merkitsevät, että $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ja

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ja

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Nyt siis

$$xy = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-2}$$

ja differentiaaliyhtälön vasen puoli saa muodon

$$y'' + xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^{n-2} = 2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n(n-1)a_n + a_{n-3}) x^{n-2}.$$

Koska tämän pitää olla nolla kaikilla x:n arvoilla, on oltava $a_2 = 0$ ja

$$a_n = -\frac{1}{n(n-1)} a_{n-3}$$

kaikilla $n \geq 3$. Tällöin siis $a_3 = -\frac{1}{3\cdot 2} a_0 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{4\cdot 3} a_1 = -\frac{1}{4\cdot 3}$, $a_5 = -\frac{1}{5\cdot 4} a_2 = 0$, $a_6 = -\frac{1}{6\cdot 5} a_3 = 0$, $a_7 = -\frac{1}{7\cdot 6} a_4 = \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}$, jne ja

$$y(x) = x - \frac{1}{4\cdot 3} x^4 + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} x^7 - \dots$$

Näin saatu sarja suppenee kaikilla x:n arvoilla (miksi?), joten saatu sarja edustaa Airyn yhtälön ratkaisua koko reaaliakselilla.

Seuraavat esimerkit ovat täydentäviä, eikä niitä katsota kuuluvaksi kurssin perussisältöön.

Esimerkki 17 (Vetyatomin elektroni). Kvanttimekaniikassa hiukkasen liiketilaa kuvaan Schrödingerin yhtälö, joka voidaan abstraktilla tasolla kirjoittaa muotoon

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -iH\psi(t),$$

missä ψ on hiukkasen käyttäytymistä kuvaava aaltofunktio ja H ns. Hamiltonin operaattori, joka esittää hiukkasen kokonaisenergiaa. Monissa esimerkeissä H sisältää liike-energian, jonka esittäminen puolestaan tuo yhtälöön toisen kertaluvun derivoinnin paikkakoordinaatin suhteen.

Kvanttimekaniikka on luonteeltaan probabilistinen teoria, mikä merkitsee sitä, että aaltofunktio ψ edustaa hiukkasen tarkan paikan sijasta paikan todennäköisyysjakaumaa. Koska hiukkasen paikka ei ole eksaktisti määrätty minään ajanhetkenä, on täysin mielekästä tarkastella myös ns. ajasta riippumatonta Schrödingerin yhtälöä, joka saadaan aikariippuvaisesta Schrödingerin yhtälöstä muuttujat erottamalla. Ajasta riippumattoman Scrödingerin abstrakti muoto on

$$H\psi = E\psi,$$

missä H on Hamiltonin operaattori ja E hiukkasen kokonaisenergia. Tyypillisesti H:n esityksessä on mukana liike-energia $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}(mv)^2 = \frac{1}{2m}p^2$, ja liikemäärän p kvanttimekaanisessa esitysmuodossa esiintyy derivaatta paikkakoordinaatin suhteen.

Ajasta riippumaton vetyatomin elektronin liiketilaa kuvaava Schrödingerin yhtälö on mahdollista esittää napakoordinaatiston yleistävässä pallokoordinaatistossa, ja jakaa yhtälöiksi, joissa esiintyy etäisyys ytimestä r, sekä kulmat θ ja ϕ. Pallokoordinaatistoa käsitellään tarkemmin seuraavassa luvussa, mutta tässä yhteydessä käsitellään yhtälöä, joka esittää elektronin etäisyyttä ytimestä. Olkoon tätä kuvaava ns. radiaalinen aaltofunktio R.

Yksikköjärjestelmä huomioituna radiaalinen Schrödingerin yhtälö saa muodon

$$-\frac{\hbar}{2\mu}\frac{d^2R}{dr^2} + (-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2})R = ER, \tag{1.22}$$

missä $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h on Planckin vakio, $\mu = \frac{m_e m_y}{m_e + m_y}$ ns. redusoitu massa, jossa m_e ja m_y ovat elektronin ja ytimen massat, Z ytimen varausten määrä (vetyatomille $Z = 1$), ε_0 on tyhjiön permittiivisyys ja $l \geq 0$ on kokonaisluku, ns. sivukvanttiluku.

Fysikaalisen tulkinnan vuoksi differentiaaliyhtälölle (1.22) etsitään ratkaisuja, jotka toteuttavat ehdon

$$\int_0^\infty \frac{1}{r^2}|R|^2\,dr = 1. \tag{1.23}$$

Erityisesti pitää siis olla $R(r) \xrightarrow{r\to 0} 0$ ja $\frac{|R|^2}{r^2} \xrightarrow{r\to\infty} 0$. Lisäksi tavanomaisesti tulkittuna potentiaalienergia on negatiivinen, ja nolla vasta ”äärettömän kaukana” ytimestä. Tällöin myös elektronin energia E ajatellaan negatiiviseksi.

Yhtälön (1.22) mutkikkaita vakiokertoimia voidaan yksinkertaistaa ottamalla käyttöön uusi muuttuja $\rho = \sqrt{\frac{-8\mu E}{\hbar^2}}r$, jolloin

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\rho}\frac{d\rho}{dr} = \frac{dR}{d\rho}\sqrt{\frac{-8\mu E}{\hbar^2}} \quad \text{ja} \quad \frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d^2R}{d\rho^2}\cdot\frac{-8\mu E}{\hbar^2},$$

ja sijoittamalla tämä yhtälöön (1.22) saadaan

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + (\frac{\beta}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2})R = \frac{1}{4}R, \tag{1.24}$$

missä on merkitty $\beta = \sqrt{-\frac{\mu}{2E}}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}$. Tälle yhtälölle on periaatteessa mahdollista etsiä sarjaratkaisu suoraan, mutta osoittautuu, että saatavasta sarjasta on vaikeaa määrittää ehdot (1.23) toteuttavaa ratkaisua.

Tämän ongelman kiertämiseksi tarkastellaan ensin yhtälöä, joka näyttää määräävän dynamiikan suurin piirtein: Jos ρ on suuri, on yhtälö (1.24) likimain muotoa

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} = \frac{1}{4}R. \tag{1.25}$$

Tämän ratkaisut saadaan yritteestä $R = e^{\lambda\rho}$, mikä johtaa algebralliseen yhtälöön

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}.$$

Vaatimuksen (1.23) seuraus sulkee vaihtoehdon $\lambda = \frac{1}{2}$ pois, jolloin $R = e^{-\frac{1}{2}\rho}$ on yhtälön (1.25) ainoa vaadittua muotoa oleva ratkaisu. Toimitaan tämän jälkeen 1. kertaluvun lineaarisen yhtälön ratkaisumenetelmästä tutulla tavalla, siis esitetään yrite

$$R = e^{-\frac{1}{2}\rho}G(\rho),$$

joka yhtälöön (1.24) sijoittamalla tuottaa

$$G''(\rho) - G'(\rho) + (\frac{\beta}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2})G(\rho) = 0, \tag{1.26}$$

jolle etsitään ratkaisu sarjan

$$G(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\rho^k$$

avulla. Ehtojen (1.23) perusteella $a_0 = 0$ ja suoraan laskemalla

$$G' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \rho^{k-1}$$

ja

$$G'' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k(k-1)\rho^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}(k+1)k\rho^{k-1}.$$

Huomataan vielä että

$$\frac{G}{\rho^2} = a_1\rho^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}\rho^{k+1},$$

ja sijoittamalla nämä yhtälöön (1.26) saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}(k+1)k - a_k k + \beta a_k k - l(l+1)a_{k+1})\rho^{k-1} - a_1\rho^{-1}l(l+1) = 0.$$

tällöin $a_1 = 0$ (ellei $l = 0$) ja

$$a_{k+1}(k(k+1) - l(l+1)) = a_k(k-\beta).$$

Jos $\beta \notin \mathbb{Z}$, huomataan sijoittamalla $k = l$ että $a_l = 0$. Edelleen sijoittamalla $k = l-1$ saadaan $a_{l-1} = 0$ ja näin jatkaen $a_{l-2} = \ldots = a_1 = 0$, mutta kun $k > l$, on

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k-\beta}{k(k+1) - l(l+1)} \approx \frac{1}{k}.$$

Käyttämällä vertailukohteena eksponenttifunktion sarjaan $e^\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\rho^k$ havaitaan, että $G(\rho) \xrightarrow{\rho\to\infty} \infty$, jolloin ehdot (1.23) täyttäviä ratkaisuja ei löydy.

Ehdot (1.23) täyttävä ratkaisu löytyy siis vain, jos $\beta = n \in \mathbb{Z}$, jolloin vastaavat energiat ovat kvantittuneita:

$$E = E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar}\frac{1}{n^2}$$

Korkeammasta energiatilasta E_{n_1} matalampaan E_{n_2} siirtyessä elektroni vapauttaa fotonin, jonka energia on

$$E_{n_1} - E_{n_2} = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right). \tag{1.27}$$

Ylläoleva yhtälö tunnetaan nimellä Rydbergin kaava. Vapautuvien fotonien energia $E_{n_1} - E_{n_2}$ nähdään kokeellisesti vetyatomien emittoimassa sähkömagneettisessa säteilyssä spektriviivoina. Historiallisesti mielenkiintoisena seikkana on syytä mainita, että tämän kaavan perusteella tunnistettiin ”kaksi kertaa raskaampi vety” vuonna 1932, ennen neutronin löytymistä. Tunnistus perustui siihen, että deuteriumilla μ on likimain kaksinkertainen vetyyn nähden, muutoin kaikki on kuten kaavassa (1.27).

Kokonaislukua n kutsutaan *pääkvanttiluvuksi*. Sarjakehitelmän avulla on mahdollista määrittää funktion $R(r)$ muoto eri pää- ja sivukvanttiluvun arvoilla. Jos radiaalisen yhtälön 1.22 lisäksi ratkaistaan Schrödingerin yhtälön pallokoordinaatiston kulmista riippuvat osat, on mahdollista määrittää elektronin orbitaalien muoto eri energiatasoilla.

Esimerkki 18. Laplacen lämmönjohtumisyhtälön mukaan ohuen levyn lämpötilalle $T(x,y)$ pätee lämpötilan tasaannuttua

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{1.28}$$

Tämänkaltaisten osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisun löytämikseksi toimitaan yleensä siten, että aluksi etsitään yhtälölle (1.28) muotoa

$$T(x,y) = X(x)Y(y) \tag{1.29}$$

olevia ratkaisuja, missä X riippuu pelkästään x:stä ja Y pelkästään y:stä. Sijoittamalla (1.29) yhtälöön (1.28) saadaan

$$Y\frac{d^2X}{dx^2}+X\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \iff \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=0$$

Koska ensimmäinen summattava riippuu vain x:stä ja toinen vain y:stä, on oltava

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=C,$$

missä C on vakio. Merkitään $C=-k^2$, $(k>0)$ jolloin saadaan kaksi differentiaaliyhtälöä

$$X''=-k^2X \quad \text{ja} \quad Y''=k^2Y,$$

joiden ratkaisut ovat

$$X(x)=C_1\sin kx+C_2\cos kx \quad \text{ja} \quad Y(y)=D_1e^{ky}+D_2e^{-ky},$$

missä C_1, C_2, D_1 ja D_2 ovat vakioita. Tällöin siis $T(x,y)$ koostuu ratkaisujen

$$e^{ky}\sin kx, \quad e^{-ky}\sin kx, \quad e^{ky}\cos kx, \quad \text{ja} \quad e^{-ky}\cos kx$$

lineaarikombinaatioista, joissa arvo k tulee valita sopivasti. Valinta tapahtuu reunaehtojen perusteella: Olkoon $T(x,0)=100$, kun $x\in[0,10]$ ja $T(0,y)=T(10,y)=0$, kun $y>0$, sekä $T(x,y)\to 0$ kun $x\in[0,10]$ ja $y\to\infty$. Viimeisimmän ehdon perusteella 1. ja 3. muoto esiintyy ratkaisussa vain kertoimella 0. Lisäksi ehdon $T(0,y)=0$ perusteella 4. ratkaisu esiintyy myös kertoimella 0.

Täten siis vain muotoa $e^{-ky}\sin kx$ oleva ratkaisu esiintyy nollasta poikkeavalla kertoimella, ja ehdon $T(10,y)=0$ nojalla tulee olla $\sin(10\cdot k)=0$, mistä $10k=n\pi$, $n\in\mathbb{N}$, siis $k=\frac{n\pi}{10}$. Yhtälön lineaarisuuden perusteella taas kaikki näiden ratkaisujen lineaarikombinaatiot ovat ratkaisuja, jolloin ratkaisuksi saadaan

$$T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}b_ne^{-\frac{n\pi}{10}y}\sin\frac{n\pi}{10}x,$$

ja määrättäväksi jäävät kertoimet $b_1, b_2, b_3, \ldots$. Nämä taas saadaan reunaehdosta $T(x,0)=100$, kun $x\in[0,10]$, jolloin siis

$$100=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{10}x.$$

Yllä oleva yhtälö puolestaan sanoo, että kertoimet b_1, b_2, b_3, … ovat vakiofunktion 100 fourierkertoimet, kun funktion ajatellaan olevan 20-jaksoinen. Kertoimet b_n saadaan siis Fourier-sarjojen teorian (Myöhempi kurssi) avulla, lopputuloksena

$$b_n=\begin{cases}\frac{400}{n\pi}, \text{ jos } n \text{ on pariton,}\\ 0, \text{ jos } n \text{ on parillinen.}\end{cases}$$

Tällöin siis

$$T(x,y)=\frac{400}{\pi}\left(e^{-\frac{\pi}{10}y}\sin\frac{\pi}{10}x+\frac{1}{3}e^{-\frac{3\pi}{10}y}\sin\frac{3\pi}{10}x+\frac{1}{5}e^{-\frac{5\pi}{10}y}\sin\frac{5\pi}{10}x+\ldots\right).$$

Ratkaisun löytäminen Laplacen lämmönjohtumisyhtälölle on siis varsin työlästä, mutta vielä työläämpää on näyttää toteen, että kaikki ratkaisut todella saadaan tällä tavalla.

1.3 Separoituvat DY:t

Differentiaaliyhtälöä kutsutaan *separoituvaksi*, mikäli se voidaan kirjoittaa muotoon

$$y' = g(x)f(y), \tag{1.30}$$

missä $g(x)$ riippuu ainoastaan muuttujasta x ja $f(y)$ ainoastaan y:stä. Jos merkitään $G(x) = \int g(x)\,dx$ ja $F(y) = \int \frac{1}{f(y)}\,dy$, voidaan yhtälö (1.30) kirjoittaa muotoon

$$\frac{d}{dx}F(y(x)) = \frac{d}{dx}G(x), \tag{1.31}$$

mistä saadaan $F(y(x)) = G(x) + C$, missä C on vakio.

Käytännössä separoituva yhtälö $\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$ ratkaistaan kirjoittamalla se muotoon

$$\frac{1}{f(y)}\,dy = g(x)\,dx$$

ja integroimalla puolittain:

$$\int \frac{1}{f(y)}\,dy = \int g(x)\,dx + C.$$

Esimerkki 19. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $\frac{dy}{dx} = -y^2$ ja kirjoitetaan tämä muotoon

$$-\frac{1}{y^2}\,dy = dx$$

ja integroidaan:

$$\int -\frac{1}{y^2}\,dy = \int dx + C,$$

mistä saadaan

$$\frac{1}{y} = x + C,$$

josta edelleen voidaan ratkaista $y = \frac{1}{x+C}$.

Esimerkki 20. Verhulstin populaatiomallissa populaation koko p toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$p' = ap - bp^2, \tag{1.32}$$

Missä a ja b ovat positiivisia vakioita. Differentiaaliyhtälöä (1.32) kutsutaan *logistiseksi* yhtälöksi. Logistisen yhtälön

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2$$

ratkaisu saadaan separoimalla:

$$\int \frac{1}{ap - bp^2}\,dp = \int dt.$$

Tämä voidaan sieventää muotoon (miten?)

$$\frac{1}{a}\ln\frac{p}{a - bp} = t + C,$$

mistä edelleen saadaan

$$\frac{p}{a - bp} = e^{a(t+C)}, \tag{1.33}$$

josta voidaan ratkaista

$$p = \frac{a}{b + e^{-aC}e^{-at}}. \tag{1.34}$$

Sijoittamalla $t = 0$ yhtälöön (1.33) antaa (merkitään $p_0 = p(0)$) $\frac{p_0}{a - bp_0} = e^{aC}$, ja edelleen sijoittamalla tämä yhtälöön (1.34) saadaan ratkaisuksi

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-at}}.$$

Esimerkki 21. Newtonin liikeyhtälön mukaan kappaleeseen vaikuttavien voimien summa on yhtä kuin kappaleen massa kertaa kiihtyvyys. Putoavaan kappaleeseen vaikuttaa maan vetovoima suuruudella mg ja ilmanvastuksen aiheuttama voima suuruudella $-kv^2$, missä v on kappaleen nopeus ja k on vakio. Tällöin putoavan kappaleen liikettä kuvaa yhtälö

$$mg - kv^2 = ma,$$

missä a on kappaleen kiihtyvyys. Koska $v'(t) = a$, voidaan ylläoleva yhtälö kirjoittaa muotoon

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2,$$

josta muuttujat separoimalla ja integroimalla saadaan

$$\int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} = \int dt = t + C.$$

Yhtälön vasemman puolen määrittämiseksi käytetään kaavaa

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

(joka seuraa osamurtohajotelmista), jonka mukaan

$$\int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} dv = \frac{m}{k} \int \frac{1}{\frac{gm}{k} - v^2} dv = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}} \ln \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}} + v}{\sqrt{\frac{gm}{k}} - v}.$$

Merkinnällä $\alpha = \sqrt{\frac{gm}{k}}$ saadaan yhtälö muotoon

$$\frac{\alpha}{2g} \ln \frac{\alpha + v}{\alpha - v} = t + C,$$

josta saadaan

$$\frac{\alpha + v}{\alpha - v} = e^{\frac{2g}{\alpha}(t+C)}.$$

Merkittäessä edelleen $\beta(t) = e^{\frac{2g}{\alpha}t}$ ja $C_1 = e^{\frac{2g}{\alpha}C}$ saadaan yhtälön ratkaisuksi

$$v(t) = \alpha \frac{C_1 - \beta(t)^{-1}}{C_1 + \beta(t)^{-1}}.$$

Koska funktio $\beta(t) = e^{\frac{2g}{\alpha}t}$ lähenee ääretöntä t:n kasvaessa, nähdään helposti, että $v(t)$ lähenee arvoa $\alpha = \sqrt{\frac{gm}{k}}$. Kyseistä arvoa kutsutaan nimellä *rajanopeus* (engl. *terminal velocity*).

1.4 Eksaktit DY:t

Jos ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälössä ei esiinny derivaatan y' potensseja, voidaan y' ottaa yhteiseksi tekijäksi ja kirjoittaa yhtälö muotoon

$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0. \tag{1.35}$$

Tämä yhtälö voidaan toisinaan ratkaista seuraavaa menettelyä käyttäen.

Jos kahden muuttujan funktiossa $F(x,y)$ muuttuja $y = y(x)$ riippuu edelleen muuttujasta x, on kyseessä itse asiassa yhden muuttujan funktio $g(x) = F(x,y(x))$. Tällöin derivaatta $g'(x)$ lasketaan seuraavasti:

$$g'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' \tag{1.36}$$

(miksi näin on, selvitetään myöhemmin).

Määritelmä 5. Jos on olemassa kahden muuttujan funktio $F(x,y)$, jolle $\frac{\partial F}{\partial x} = f(x,y)$ ja $\frac{\partial F}{\partial y} = g(x,y)$, sanotaan, että differentiaaliyhtälö (1.35) on *eksakti*.

Jos (1.35) on eksakti, on

$$g'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = f(x,y) + g(x,y)y' = 0,$$

jonka ratkaisu on siis $g(x) = F(x,y) = C$ (vakio).

Kokoamalla kaiken yllämainitun yhteen saadaan seuraava tulos: Jos on olemassa sellainen kahden muuttujan funktio $F(x,y)$, että $\frac{\partial F}{\partial x} = f(x,y)$ ja $\frac{\partial F}{\partial y} = g(x,y)$, niin differentiaaliyhtälön (1.35) ratkaisu on

$$F(x,y) = C.$$

Luonnollisesti heräävä kysymys onkin, millä ehdoin voidaan löytää kahden muuttujan funktio $F(x,y)$, jolle ehdot $\frac{\partial F}{\partial x} = f(x,y)$ ja $\frac{\partial F}{\partial y} = g(x,y)$ pätevät.

On mahdollista todistaa, että funktio $F(x,y)$ on olemassa tarkalleen silloin, kun

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}, \tag{1.37}$$

kunhan $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ ovat riittävän säännöllisiä (toisen kertaluvun osittaisderivaatat jatkuvia).

Esimerkki 22. Differentiaaliyhtälö

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} y' = 0 \tag{1.38}$$

on eksakti, sillä $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - x$ toteuttaa

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1$$

ja

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Yhtälön (1.38) ratkaisuksi saadaan siis $F(x,y) = C$, mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\sqrt{x^2+y^2} - x = C$$

ja edelleen muotoon

$$x = \frac{y^2 - C^2}{2C}.$$

Vaikka yhtälö (1.35) ei olisikaan alun perin eksakti, on toisinaan mahdollista löytää ns. *integroiva tekijä*, jolla kerrottuna yhtälöstä tulee eksakti.

Esimerkki 23. Yhtälö

$$(x+y^2)y' - y = 0$$

ei ole eksakti, koska $\frac{\partial}{\partial x}(x+y^2) = 1 \neq -1 = \frac{\partial}{\partial y}(-y)$. Tällö yhtälöllä on kuitenkin integroiva tekijä $\frac{1}{y^2}$, sillä yhtälö

$$(\frac{x}{y^2}+1)y' - \frac{1}{y} = 0 \tag{1.39}$$

on eksakti: $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{y^2}+1) = \frac{1}{y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{1}{y})$. Etsitään $F(x,y)$, jolle $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{x}{y^2}+1$ ja $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = -\frac{1}{y}$. Ensimmäisestä yhtälöstä nähdään, että $F(x,y) = -\frac{x}{y}+y+f(x)$ ja toisesta $F(x,y) = -\frac{x}{y}+g(y)$, missä f riippuu vain x:stä ja g vain y:stä. Tällöin $g(y) = y+f(x)$, jolloin on oltava $f(x) = C$ (vakio). Näin ollen

$$F(x,y) = -\frac{x}{y}+y+C$$

ja (1.39) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{d}{dx}(y-\frac{x}{y}+C) = 0,$$

mistä ratkaisuksi saadaan $y-\frac{x}{y}+C = C_1$, toisin sanoen $y-\frac{x}{y} = C_2 = C_1-C$.

Esimerkki 24. Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö olisi voitu ratkaista myös seuraavasti: Yritetään löytää yhtälölle

$$y'+a(x)y-b(x) = 0$$

integroiva tekijä $\mu(x)$. Jos tällainen on olemassa, on yhtälö

$$\mu(x)y'+\mu(x)a(x)y-\mu(x)b(x) = 0 \tag{1.40}$$

eksakti, jolloin siis ehdon (1.37) nojalla pitäisi olla

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(x)a(x)y-\mu(x)b(x)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\mu(x),$$

mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mu(x)a(x) = \mu'(x). \tag{1.41}$$

Oletetaan aluksi, että integroiva tekijä $\mu(x)$ löytyy, jolloin siis (1.41) pätee. Tällöin voidaan yhtälö (1.40) kirjoittaa muotoon

$$\mu(x)y'+\mu'(x)y-\mu(x)b(x) = 0,$$

mikä puolestaan voidaan tulon derivointisäännön nojalla kirjoittaa muotoon

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)b(x),$$

ja ratkaisuksi saadaan

$$y = \frac{1}{\mu(x)}(\int \mu(x)b(x)\,dx + C). \tag{1.42}$$

On vielä selvitettävä miten integroiva tekijä $\mu(x)$ voidaan löytää, mutta tämä selviää helposti yhtälön (1.41) perusteella:

$$\frac{d}{dx}\ln\mu(x) = a(x),$$

minkä ratkaisuna saadaan

$$\mu(x) = \exp(\int a(x)\,dx).$$

Suoralla laskulla voidaan todeta, että tällä tavoin saatu ratkaisu (1.42) on sama kuin aiemmin esitetyllä menetelmällä (homogenisointi ja vakion variointi) saatu ratkaisu.

1.5 Lineaarisista vakiokertomisista DY-ryhmistä

Lineaaristen, vakiokertoimisten differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisemiseksi jopa eksaktisti on olemassa periaatteessa toimiva menetelmä, joka kuvaillaan tässä luvussa. Menetelmän käytännön toimivuus riippuu kuitenkin mahdollisuudesta löytää diagonaalinen tai Jordan-esitys DY-ryhmän matriisille, kuin myös mahdollisuudesta löytää eksplisiittisesti antiderivaatta yhtälöryhmässä tai sen käsittelyssä esiintyville funktioille.

Menetelmä ei ole mitenkään yllättävä. Päinvastoin, se on täysin suoraviivainen yleistys menetelmästä, jolla ratkaistaan 1. kertaluvun lineaarinen (vakiokertoiminen) differentiaaliyhtälö. Yllättävänä voisi pikemminkin pitää sitä kuinka paljon mekaanista laskentaa voisi periaatteessa vähentää analysoimalla menetelmää tarkemmin, mutta se ei ole tässä yhteydessä ensisijainen tavoite. Tällä kurssilla pyritään esittämään lähinnä periaate lineaaristen DY-ryhmien ratkaisemiseksi, vaikkakin ratkaisujen löytäminen laskennallisesti onkin työlästä.

Lineaarinen, vakiokertoiminen DY-ryhmä on muotoa

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \quad\vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}. \tag{1.43}$$

Tämä voidaan kirjoittaa abstraktimpaan muotoon

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f},$$

missä $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ ja $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)^T$ ovat pystyvektoreita, joiden jokainen koordinaatti on t:n funktio ja A on $n \times n$ vakiomatriisi.

Ratkaisujen löytämiseksi turvaudutaan analogiaan: Jos $x' = ax + f$ on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, jossa lisäksi a on vakio, voidaan aluksi ratkaista homogeeninen yhtälö $x' = ax$ ja tämän jälkeen voidaan löytää ratkaisu alkuperäiselle yhtälölle vakion varioinnilla. Homogeenisen yhtälön $x' = ax$ ratkaisu taas on tunnettu: Yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{x'}{x} = a \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\ln x = a \Leftrightarrow \ln x = \int a\,dt \Leftrightarrow x = e^{\int a\,dt}.$$

Kertoimen a ollessa vakio on $\int a\,dt = at + C_0$ ja ratkaisu on siis muotoa

$$x = e^{at+C_0} = e^{C_0}e^{at} = Ce^{at}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi olisiko mahdollista löytää homogeeniselle differentiaaliyhtälöryhmälle ratkaisu analogisesti. Tätä varten turvaudutaan sarjaan perustuvaan määritelmään

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}t^k A^k,$$

josta muodollisesti derivoimalla saadaan

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!}t^{k-1}A^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}A^{k-1}A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}t^k A^k A = e^{tA}A.$$

Samoin voidaan johtaa yhtälö $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$, mutta tekniset yksityiskohdat sivuutetaan tässä yhteydessä. Näin ollen, jos $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}$, missä $\mathbf{c}$ on vakiovektori, on

$$\mathbf{x}' = Ae^{tA}\mathbf{c} = A\mathbf{x}.$$

Itse asiassa voidaan osoittaa, että homogeenisella yhtälöryhmällä ei ole muunlaisia ratkaisuja, mutta tämä sivuutetaan tällä kurssilla. Yhteenvetona esitetään seuraava tulos:

Lause 6. *Homogeenisen differentiaaliyhtälöryhmän* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ *ratkaisu on* $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}$*, missä* $\mathbf{c}$ *on vakiovektori.*

Huomautus 3. Matriisin e^{tA} määrittäminen käytännössä ei kuitenkaan ole helpointa suoraan sarja-esitykseen nojautuen, vaan lineaarialgebran kurssilla esitetyllä tavalla.

Huomautus 4. Käytännössä matriisia e^{tA} ei tarvitse määrittää. Riittää määrittää $e^{tA}\mathbf{v}_i$ matriisin A (yleistetyille) ominaisvektoreille $\mathbf{v}_i$. Koska yleistetyt ominaivektorit muodostavat kannan, voidaan mikä hyvänsä vecktori $\mathbf{c}$ esittää näiden avulla:

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n.$$

Jos $\mathbf{v}$ on matriisin A yleistetty ominaisarvoon λ liittyvä ominaisvektori, on $(A - \lambda I)^m\mathbf{v} = \mathbf{0}$ jostakin rajasta m alkaen, ja siksi

$$\begin{aligned} e^{tA}\mathbf{v} &= e^{t\lambda I + tA - t\lambda I}\mathbf{v} = e^{t\lambda I}e^{t(A-\lambda I)}\mathbf{v} = e^{t\lambda}Ie^{t(A-\lambda I)}\mathbf{v} \\ &= e^{t\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\mathbf{v} = e^{t\lambda}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Jos merkitään $\mathbf{x}_i(t) = e^{tA}\mathbf{v}_i$, nähdään, että homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu saadaan näin ollen muodossa

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + \ldots + c_n\mathbf{x}_n(t) = X(t)\mathbf{c},$$

missä matriisi $X(t)$ muodostuu sarakkeista $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ ja $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$.

Huomautus 5. Muotoa

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f} \tag{1.44}$$

olevan lineaarisen epähomogeenisen differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisemiseksi voidaan soveltaa aiemmin esiintynyttä tekniikkaa: Homogeenisen yhtälöryhmän $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ ratkaisu on muotoa $\mathbf{x} = e^{tA}\mathbf{c}$, mikä voidaan saattaa muotoon $\mathbf{x} = X(t)\mathbf{c}$ yllämainitulla tavalla. Näin ollen epähomogeenisen yhtälöryhmän ratkaisua voidaan etsiä *vakion varioinnilla,* ts. yritelmällä, jossa vakiovektori $\mathbf{c}$ korvataan funktiolla $\mathbf{c}(t)$, siis $\mathbf{x} = X(t)\mathbf{c}(t)$, josta saadaan yhtälö $X(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{f}$ [1]ja edelleen

$$\mathbf{c}'(t) = X(t)^{-1}\mathbf{f},$$

mistä

$$\mathbf{c}(t) = \int X(t)^{-1}\mathbf{f} + \mathbf{c}.$$

Mikäli tämä osataan laskea, saadaan

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}(t) = X(t)\int X(t)^{-1}\mathbf{f}\,dt + X(t)\mathbf{c}.$$

Esimerkki 25. Ratkaistaan DY-pari

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y + t \\ y' = 2x - 2y + 3e^t. \end{cases}$$

Edellä kuvatulla menetelmällä.

DY-pari voidaan esittää muodossa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 3e^t \end{pmatrix},$$

[1] Matriisien summan ja tulon derivoinnille on voimassa samankaltaiset säännöt kuin funktioillekin, mutta näitä ei tässä yhteydessä selvitetä yksityiskohtaisesti.

josta homogenisoimalla saadaan muoto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Homogeenisen DY-parin ratkaisut saadaan aiemmin esitetyllä tavalla: Etsimällä diagonaaliesitys matriisille A saadaan

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1},$$

missä

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nyt siis $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}(t)$, ja tässä tapauksessa saadaan edelleen

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(t) &= \left(P \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} \right)^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 3e^t \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 3e^t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6e^{-t} + 6e^{2t} + 4te^{-2t} - te^t \\ -3e^{-t} + 12e^{2t} + 2te^{-2t} - 2e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tästä voidaan $\mathbf{c}(t)$ määrittää integroimalla:

$$\mathbf{c}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3e^{2t} + e^{-2t}(-1-2t) + e^t(1-t) \\ 3e^{-t} + 6e^{2t} + e^t(2-2t) + e^{-2t}(-\frac{1}{2} - t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Alkuperäisen ryhmän ratkaisu saadaan tästä sijoittamalla

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}(t).$$

Esimerkki 26. Etsitään uudelleen esimerkin 11 DY-parin

$$\begin{cases} y' + 4y + 4z = 0 \\ z' + 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

ratkaisut. DY-pari voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

Käyttämällä kurssin alkuosan menetelmiä voidaan matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoiksi löytää -8 ja -2 sekä näitä vastaaviksi ominaisvektoreiksi $(1,1)$ ja $(-2,1)$. Näin ollen riippumattomat ratkaisut ovat

$$e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ja

$$e^{-2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Näin ollen yleinen ratkaisu on muotoa

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

missä C_1 ja C_2 ovat vakioita.

Esimerkki 27. Etsitään DY-ryhmän

$$\begin{cases} x' = & 2x - 2y - z \\ y' = & -2x + 2y + z \\ z' = & -x + y + 5z \end{cases}$$

ratkaisut (Harjoitustehtävä).

Edellämainitun perusteella DY-ryhmän (1.43) ratkaisujen etsimiseksi pitää löytää homogeenisen DY-ryhmän ratkaisut ja niiden lisäksi yksittäinen ratkaisu DY-ryhmälle. Yksittäisen ratkaisun etsimiseksi lineaariselle vakiokertoimiselle DY-ryhmälle voidaan käyttää menettelyä, joka muistuttaa suuresti Gaussin-Jordanin menetelmää yhtälöryhmän ratkaisemiseksi, mutta tavanomaisten riviopeRaatioiden lisäksi sallitaan derivointi ja yhtälön lisääminen toiseen derivoituna.

Muodollisesti tämä menetelmä voidaan kuvata ottamalla käyttöön derivaattaoperaattori $D = \frac{d}{dt}$, jonka avulla voidaan merkitä $y = D^0 y$, $y' = Dy$, $y'' = D^2 y$, ... Operaattorimerkintä voidaan yleistää polynomiksi: Jos $L = a_n D^n + \ldots + a_1 D + a_0$, on

$$Ly = (a_n D^n + \ldots + a_1 D + a_0)y = a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$$

Merkinnät voidaan hajoittaa jopa tuloiksi:

$$(D+1)(3D-2)y = (3D-2)(D+1)y = (3D^2 + D - 2)y = 3y'' + y' - 2y.$$

Lineaaristen, vakiokertoimisten DY-ryhmien ratkaisu voidaan muodollisesti palauttaa Gaussin-Jordanin -menetelmään, jossa otetaan huomioon, että derivaattaoperaattorilla D ei ole käänteistä operaatiota. Siksi menetelmässä pyritään saamaan kerroinmatriisi ainoastaan porrasmuotoon, ei välttämättä redusoituun porrasmuotoon.

Esimerkki 28. Ratkaistaan DY-pari

$$\begin{cases} x' = 3x & -2y & +t \\ y' = 2x & -2y & +3e^t \end{cases}$$

Käytämällä operaattorimerkintää tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{cases} (D-3)x & +2y = & t \\ -2x & +(D+2)y = & 3e^t \end{cases}$$

Kertomalla ylempi yhtälö luvulla 2 ja soveltamalla operaattoria $D - 3$ alempaan saadaan pari

$$\begin{cases} 2(D-3)x & +4y = & 2t \\ (D-3)(-2x) & +(D-3)(D+2)y = & (D-3)3e^t, \end{cases}$$

ja laskemalla näin saadut DY:t yhteen saadaan

$$(D^2 - D - 2)y = 2t - 6e^t,$$

joka tavanomaisella tavalla kirjoitettuna saa muodon

$$y'' - y' - 2y = 2t - 6e^t.$$

Tämän ratkaisuja varten pitää etsiä homogeenisen DY:n $y'' - y' - 2y = 0$ ratkaisut (jotka ovat e^{-t} ja e^{2t}) sekä yksittäinen ratkaisu (esim. Laplace-muunnoksilla) $y = \frac{1}{2} + t + 3e^t$. Tästä saadaan myös $x = \frac{1}{2}((D+2)y - 3e^t)$, joka voidaan edelleen sieventää haluttuun muotoon.

1.6 Autonomisista DY-pareista

Sanotaan, että differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(x,y) \\ y'(t) = f_2(x,y) \end{cases}$$

on *autonominen*, jos f_1:n ja f_2:n lausekkeessa ei esiinny muuttujaa t. Autonomisesta differentiaaliyhtälöparista voidaan eliminoida muuttuja t soveltamalla derivointia parametrin suhteen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

(kts. Differentiaali- ja integraalilaskenta). Tällöin saadaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}. \tag{1.45}$$

On kuitenkin huomattava, että vaikka (1.45) voitaisiin ratkaista, saadaan ainoastaan sen käyrän yhtälö, jota pitkin $(x(t), y(t))$ kulkee, kun t kasvaa. Itse liikeilmiö jää muilla keinoin selvitettäväksi (millä nopeudella piste (x,y) kulkee, hidastuuko kulku, onko olemassa rajapistettä, jne.). Käyrää $(x(t), y(t))$ sanotaan *ratakäyräksi*.

Esimerkki 29. Differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} x'(t) = x - y \\ y'(t) = x + y \end{cases}$$

on autonominen ja sen ratakäyrien differentiaaliyhtälö on $y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$. Tähän voidaan soveltaa sijoitusta $z = \frac{y}{x}$ (harjoitustehtävä).

Esimerkki 30. Lotka-Volterra differentiaaliyhtälöpari kuvaa kahden lajin (peto ja saalis) yhteiseloa. Yksin eläessään x (saaliseläinten kanta) kasvaisi, kun taas y (petoeläinten kanta) vähenisi. Yhdessä eläessä x kärsii y:stä ja y hyötyy x:stä. Tämänkaltaista dynamiikkaa yksinkertaistetussa muodossa kuvaa differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x - \beta xy \\ y'(t) = -\gamma y + \delta xy, \end{cases} \tag{1.46}$$

missä vakiot α, β, γ ja δ ovat positiivisia ja termi xy kuvaa lajien kohtaamislaajuutta.

Differentiaaliyhtälöpari (1.46) on autonominen ja ratakäyrien yhtälö on muotoa

$$y' = \frac{y}{x}\frac{\delta x - \gamma}{\alpha - \beta y},$$

minkä ratkaisu

$$\alpha \ln y - \beta y = \delta x - \gamma \ln x + C \tag{1.47}$$

voidaan saada separoimalla yhtälö. Käyrät (1.47) ovat pisteen $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ ympäri kiertäviä suljettuja käyriä, ja parin (1.46) ratkaisut jaksollisia: On olemassa sellainen luku T, että $(x(T), y(T)) = (x(0), y(0))$.

Jos parin (1.46) ensimmäinen yhtälö kirjoitetaan muotoon

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha - \beta y,$$

saadaan integroimalla

$$0 = \ln\frac{x(T)}{x(0)} = \int_0^T \frac{x'}{x}\,dt = \int_0^T (\alpha - \beta y)\,dt = \alpha T - \beta \int_0^T y(t)\,dt,$$

mistä nähdään, että

$$\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{1.48}$$

Yhtälön (1.48) vasemman puolen lauseketta kutsutaan funktion $y(t)$ *keskiarvoksi välillä* $[0,T]$ ja merkitään $\bar{y}$.

Samalla tavalla funktion $x(t)$ keskiarvoksi välillä $[0,T]$ saadaan $\bar{x} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Jos ulkopuolinen toimija hävittää *kumpaakin eläinkantaa* tehokkuudella e, tulee yhtälöparin (1.46) oikealle puolelle lisätä termit $-ex$ ja $-ey$, siis α ja γ korvautuvat luvuilla $\alpha - e$ ja $\gamma + e$. Uudet keskiarvot tulevat tällöin olemaan

$$\bar{x} = \frac{\gamma + e}{\delta}, \quad \text{ja} \quad \bar{y} = \frac{\alpha - e}{\beta}.$$

Täten siis kohtuullinen ($e < \alpha$) ulkopuolinen toiminta itse asiassa lisää saaliseläinten määrän keskiarvoa.

1.7 Differentiaaliyhtälöiden numeerisesta ratkaisemisesta

Differentiaaliyhtälölle

$$y' = f(t,y)$$

alkuarvolla $y(0) = y_0$ ei tunneta yleistä ratkaisukaavaa, vaikka useita erikoistapauksia voidaankin ratkaista. Lisäksi ratkaisun *olemassaolo* ja yksikäsitteisyys voidaan taata melko vaatimattomin oletuksin. Jos yhden differentiaaliyhtälön sijasta on tarkasteltava differentiaaliyhtälöryhmiä

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots \quad \ldots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}, \tag{1.49}$$

on eksplisiittisiä ratkaisumenetelmiä entistä vähemmän. Tällöin voidaan turvautua numeerisiin menetelmiin, joissa määritetään funktioiden likimääräiset arvot ajanhetkillä 0, h, $2h$, $3h$, $4h$, ... Differentiaaliyhtälöryhmän muodosta ja alkuarvoista riippuu kuinka hyvin saadut likiarvot kuvaavat todellisia ratkaisuja. Näitä kysymyksiä tarkastellaan kaaosteorian piirissä.

Huomautus 6. Kaikki differentiaaliyhtälöryhmät voidaan saattaa muotoon (1.49) muotoon ottamalla käyttöön uusia funktioita. Esimerkiksi korkeamman kertaluvun derivaatat $y^{(n)}$ voidaan palauttaa matalampiin uuden funktion $z = y'$ avulla, jolloin $z^{(n-1)} = y^{(n)}$, mutta yhtälöiden määrää pitää kasvattaa: uudeksi yhtälöksi tulee ottaa funktion z määrittelevä $y' = z$.

Yksinkertaisin numeerinen menetelmä, ns. *Eulerin menetelmä* perustuu siihen, että derivaatta edustaa funktion lineaarista approksimaatiota. Tällöin funktion y arvoja y_0, y_1, y_2, y_3, ... aikavälein h lasketaan seuraavasti:

$$y_{i+1} = y_i + hy'(t_i) = y_i + h \cdot f(t_i, y_i).$$

Menetelmä yleistyy suoraviivaisesti differentiaaliyhtälöryhmille, mutta sitä voidaan parantaa oleellisesti käyttämällä lineaarisen approksimaation sijaan Taylorin polynomeja. Näin saatavia menetelmiä kutsutaan Runge–Kutta -menetelmiksi. Nämä perustuvat korkeamman kertaluvun approksimaatioihin, joissa derivaattojen arvoja approksimoidaan laskemalla funktioiden differenssejä.

Näiden johtaminen on kuitenkin teknisesti mutkikasta ja sivuutetaan tässä yhteydessä. Menetelmien esittäminen sen sijaan niiden esittäminen on melko suoraviivaista: Hyväksi havaittussa *Runge-Kutta 4*:ssä funktion y arvoja y_0, y_1, y_2, y_3, ... lasketaan seuraavasti:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

missä

$$\begin{cases} k_1 = f(t_i, y_i)h \\ k_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)h \\ k_3 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2)h \\ k_4 = f(t_i + h, y_i + k_3)h \end{cases}.$$

Runge-Kutta 4 toimii myös differentiaaliyhtälöryhmillä. Se on ylläolevan esityksen perusteella helppo ohjelmoida, mutta valmiita ohjelmia Runge-Kutta 4:n käyttämiseksi on runsaasti saatavilla.

Esimerkki 31. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöparia

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x^2 \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}xy \end{cases} \tag{1.50}$$

alkuehdoilla $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

Matlabiin ohjelmoitu `ode23` on muunnelma Runge-Kutta -menetelmästä. Tätä käyttäen DY-parin likimääräisratkaisu välillä $t \in [0, 10]$ voidaan löytää seuraavasti: `[t,xy]=ode23(@esimpari,[0 10],[2 1])` laskee vektorin `[t,xy]`, jossa `t` on lista ajanhetkistä välillä $[0, 10]$ ja `xy` lista funktioparin (x, y) likiarvoista. `esimpari` on pystyvektori, joka alkioina ovat DY-parin (1.50) oikean puolen funktiot. Vektori `[2 1]` määrittelee alkuarvot $x(0) = 2$ ja $y(0) = 1$.

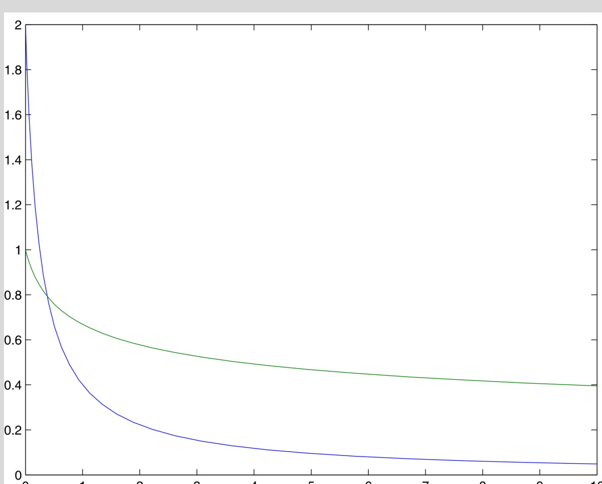
Seuraavat rivit voidaan kirjoittaa Matlabiin *M*-tiedostoksi:

```
function esimerkki
[t,xy]=ode23(@esimpari,[0 10],[2 1])
plot(t,xy)
return

%Yllä olevat rivit käyttävät ode23-ohjelmaa DY-parin
%likimääräiseen ratkaisemiseen ja kuvaajan piirtämiseen

function arvo=esimpari(t,xy)
x=xy(1);
y=xy(2);
arvo(1,1)=-2*x*x;
arvo(2,1)=-0.5*x*y;
return

%Yllä oleva määrittelee funktion esimpari. Funktion arvo
%on 2-pituinen pystyvektori, joka Matlabissa voidaan
%esittää 2*1-matriisina: arvo(1,1) on 1. alkio ja
%arvo(2,1) pystyvektorin 2. alkio.
```



Kuviossa funktion x kuvaaja alkaa arvosta 2 ja y:n arvosta 1. Tarkempi analyysi osoittaa, että molempien funktioiden kuvaajat lähestyvät nollaa t:n kasvaessa.

Huomautus 7. Edellisen esimerkin differentiaaliyhtälöpari voidaan ratkaista myös eksplisiittisesti. Ensinnäkin, autonomiselle parille saadaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{2}xy}{-2x^2} = \frac{1}{4}\frac{y}{x},$$

mikä on separoituva yhtälö:

$$4\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx + C,$$

mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$4\ln y = \ln x + C,$$

ja edelleen $y^4 = e^C x$. Vakio e^C saadaan alkuehdoista sijoittamalla $t = 0$: $y(0) = 1$ ja $x(0) = 2$. Tällöin $1^4 = e^C 2$, josta $e^C = \frac{1}{2}$. Tällöin siis $y = \sqrt[4]{\frac{x}{2}}$, mutta miten pari (x, y) käyttäytyy t:n funktiona, jää selvittämättä tällä tavalla.

Toisaalta taas parin ensimmäinen yhtälö on separoituva:

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\,dx = dt,$$

mistä integroimalla saadaan

$$\frac{1}{2}\frac{1}{x} = t + C_2,$$

ja jälleen alkuehto kertoo, että $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0 + C_2$. Näin ollen $x = \frac{2}{4t+1}$ ja $y = \sqrt[4]{\frac{1}{4t+1}}$.

1.8 Sekalaisia menetelmiä

1.8.1 Sijoitukset $\frac{y}{x}$ ja $ax + by$

Muotoa $y' = f(y/x)$ ja $y' = f(ax + by)$ olevat differentiaaliyhtälöt muuntuvat separoituviksi yhtälöiksi sijoituksilla $\frac{y}{x} = z(x)$ ja $ax + by = z(x)$.

Esimerkki 32. Yhtälö $y' = x^2 + 2xy + y^2$ voidaan kirjoittaa muotoon $y' = (x + y)^2$, ja sijoittamalla $z = x + y$ saadaan $z' = 1 + y'$, joten päädytään yhtälöön

$$z' - 1 = z^2,$$

joka saadaan muotoon

$$\frac{1}{z^2 + 1}\,dz = dx.$$

integroimalla saadaan $\arctan z = x + C$, mistä $z = \tan(x + C)$. Alkuperäinen funktio sijoittamalla saadaan $y = -x + \tan(x + C)$.

1.8.2 Bernoullin DY

Sijoitus $z = y^{1-a}$ ($a \neq 1$) muuntaa *Bernoullin differentiaaliyhtälön*

$$y' + p(x)y = q(x)y^a \tag{1.51}$$

lineaariseksi differentiaaliyhtälöksi.

Esimerkki 33. Logistinen differentiaaliyhtälö

$$p' = ap - bp^2$$

on separoituva, mutta myös muotoa (1.51). Sijoittamalla $z = p^{-1}$ saadaan $z' = -p^{-2}p'$, ja yhtälö muuntuu muotoon

$$-z'p^2 = ap - bp^2,$$

mistä $-p^2$:lla jakamalla saadaan

$$z' + az = b. \tag{1.52}$$

Näin saadun lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisut saadaan aluksi homogenisoimalla: $z_H = Ce^{-at}$ on homogeenisen yhtälön ratkaisu, minkä jälkeen vakion variointi tuottaa yhtälön (1.52) ratkaisuksi

$$z = \frac{b}{a} + Ce^{-at}.$$

Alkuperäisen yhtälön ratkaisuksi saadaan tällöin

$$p = \frac{1}{\frac{b}{a} + Ce^{-at}} = \frac{a}{b + aCe^{-at}},$$

mikä saadaan muotoon

$$p = \frac{a}{b + a(\frac{1}{p_0} - \frac{b}{a})e^{-at}} = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-at}}$$

merkitsemällä $p_0 = p(0)$.

1.8.3 Käänteisfunktioon siirtyminen

Differentiaaliyhtälö saattaa toisinaan olla helpommin ratkaistavissa funktion $y = y(x)$ sijaan tämän käänteisfunktion $x = x(y)$ differentiaaliyhtälönä. Tällöin on muistettava, että $x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$ $(\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}})$.

Esimerkki 34. Esimerkin 23 differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$x' - \frac{1}{y}x = y,$$

mikä on lineaarinen differentiaaliyhtälö funktion $x(y)$ suhteen.

1.8.4 Muuttujan vaihtaminen

Eulerin differentiaaliyhtälö on muotoa

$$x^2y'' + pxy' + qy = f(x), \tag{1.53}$$

missä q ja q ovat vakioita. Jos merkitään $t = \ln x$ ja $y_1(t) = y(e^t)$ (jolloin $y(x) = y_1(\ln x)$), saadaan ketjusäännöllä

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy_1}{dt}$$

ja

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy_1}{dt} + \frac{d^2y_1}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}y_1'(t) + \frac{1}{x^2}y_1''(t).$$

Sijoittamalla nämä alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$y_1''(t) + (p-1)y_1'(t) + qy_1(t) = f(e^t),$$

jonka ratkaisut voidaan ainakin periaatteessa määrittää Laplace-muunnosta käyttämällä.

1.8.5 Yhtälö $y'' = f(y)$

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$y'' = f(y) \tag{1.54}$$

voidaan palauttaa ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi kertomalla (1.54) tekijällä $2y'$. Tällöin saadaan $2y'y'' = 2f(y)y'$, mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{d}{dx}(y')^2 = 2\frac{d}{dx}\int f(y)\,dy,$$

mistä

$$(y')^2 = 2\int f(y)\,dy + C. \tag{1.55}$$

Ottamalla tästä neliöjuuri puolittain saadaan separoituva differentiaaliyhtälö.

Esimerkki 35. Newtonin liikeyhtälön mukaan kappaleeseen vaikuttava voima on $F = m\frac{d^2s}{dt^2}$, missä s on kappaleen paikkakoordinaatti. Toisaalta Newtonin gravitaatiolain mukaan m ja M-massaisten kappaleiden välillä vallitsee vetovoima, joka on verrannollinen kappaleiden massaan ja kääntäen verrannollinen niiden etäisyyden neliöön s:

$$F = G\frac{mM}{s^2}.$$

Tällöin siis liike painovoimakentässä esitetään yhtälöllä

$$ms''(t) = -G\frac{mM}{s^2},$$

(liikkeen ajatellaan suuntautuvan poispäin massasta M) joka kirjoittamalla $GM = k$ saadaan muotoon

$$s'' = -\frac{k}{s^2}.$$

Kertomalla näin saatu yhtälö $2s'$:llä saadaan

$$2s's'' - 2\frac{k}{s^2}s',$$

mikä on yhtäpitävä yhtälön

$$\frac{d}{dt}(s')^2 = 2k\frac{d}{dt}\frac{1}{s} \tag{1.56}$$

kanssa. Yhtälöstä (1.56) saadaan

$$(s')^2 = \frac{2k}{s} + C. \tag{1.57}$$

Alkuehdot $s(0) = s_0 > 0$ ja $s'(0) = v_0 > 0$ antavat $C = v_0^2 - \frac{2k}{s_0}$ ja siis

$$s' = \sqrt{\frac{2k}{s} + v_0^2 - \frac{2k}{s_0}}, \tag{1.58}$$

mistä s voidaan ratkaista (johtaa tosin työlääseen integrointitehtävään). Vaikka yhtälöä (1.58) ei ratkaistakaan, sisältävät siihen johtaneet välivaiheet jo paljon informaatiota.

Yhtälöstä (1.57) saadaan

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{s} = \frac{Cm}{2} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{s_0},$$

joka on muodoltaan energian säilymislaki: Liike-energian $\frac{1}{2}mv^2$ ja potentiaalienergian $-G\frac{Mm}{s}$ summa pysyy vakiona. Yhtälöstä (1.58) voidaan myös määrittää *pakonopeus*, ts. se nopeus, jolla maan pinnalta lähetetty kappale ei enää palaa. Ehtona voidaan käyttää sitä, että nopeudella s' ei ole nollakohtaa, mikä toteutuu, jos

$$v_0^2 - \frac{2k}{s_0} > 0.$$

Sijoittamalla tähän vakiot $s_0 = 6,378 \cdot 10^6$ m (maan säde) $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ (gravitaatiovakio) ja $M = 5,9737 \cdot 10^{24}$ kg (maan massa) saadaan ehdoksi $v_0 > 11,19 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.

Yleisemminkin voidaan todeta, että itse differentiaaliyhtälö tarjoaa toisinaan tietoa integraalikäyrästä, vaikka sitä ei olisikaan ratkaistu.

Esimerkki 36. Yhtälöstä $y' = y(1-y)$ nähdään, että $y' > 0$, kun $0 < y < 1$, joten tällä välillä y on kasvava. Kertaalleen derivoimalla saadaan

$$y'' = y'(1-y) - yy' = y'(1-2y) = y(1-y)(1-2y),$$

mistä voidaan päätellä, että integraalikäyrä on alueessa $0 < y < \frac{1}{2}$ alaspäin kupera ($y'' > 0$) ja alueessa $\frac{1}{2} < y < 1$ ylöspäin kupera ($y'' < 0$).