Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Differentiaaliyhtälöt (DY:t)

Määritelmä

Differentiaaliyhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

missä F on lauseke, joka sisältää muuttujan t, tuntemattoman funktion $y = y(t)$ sekä tämän yhden- tai useammankertaisia derivaattoja y', y'' ..., $y^{(n)}$. Lukua n kutsutaan differentiaaliyhtälön *kertaluvuksi*.

Määritelmä

Differentiaaliyhtälön ratkaisun kuvaajaa kutsutaan *integraalikäyräksi*. Yleensä integraalikäyriä on ääretön määrä, mutta yksikäsitteiseen ratkaisuun voidaan päätyä *reunaehdoilla* $y(0) = c_0$, $y'(0) = c_1$, ..., $y^{(n)}(0) = c_n$.

Yksinkertaiset DY:t

Määritelmä

Muotoa

$$y^{(n)}(t) = f(t)$$

oleva differentiaaliyhtälö on yksinkertainen. Yksinkertaisen DY:n ratkaiseminen on integrointitehtävä.

Esimerkki

- Yksiulotteinen liike tarkoittaa kappaleen liikettä yhtä koordinaattiakselia pitkin.
- Olkoon paikka ajanhetkellä t $s(t)$.
- Kappaleen nopeus on $v(t) = s'(t)$.
- Kappaleen kiihtyvyys on $a(t) = v'(t)$.
- Tasaisesti kiihtyvä liike: $a(t) = a$ (vakio).
- Tällöin $s''(t) = v'(t) = a(t) = a$.

Yksinkertaiset DY:t

Esimerkki

Radioaktiivisen hajoamisen DY

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

ei ole yksinkertainen, mutta sen ekvivalentti muoto

$$\frac{d}{dt} \ln N(t) = -\lambda$$

on.

Lineaariset DY:t

Määritelmä

Differentiaaliyhtälö

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

on lineaarinen. Jos funktiot a_n, a_{n-1}, ..., a_1 ja a_0 ovat vakioita, sanotaan yhtälöä vakiokertoimiseksi. Jos $b(t)$ on nollafunktio, sanotaan yhtälöä homogeeniseksi.

Määritelmä

C^n on n kertaa derivoituvien funktioiden joukko. $C^n[a, b]$ on välillä $[a, b]$ määriteltyjen, n kertaa derivoituvien funktioiden joukko.

Lause

Homogeenisen DY:n ratkaisut muodostavat C^n:n aliavaruuden

Lineaariset DY:t

Lause

Jos funktiot a_i ovat jatkuvia, on homogeenisella DY:llä

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

n lineaarisesti riippumatonta ratkaisua y_1, …, y_n ja yleinen ratkaisu saadaan näiden lineaarikombinaationa:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n.$$

Lineaariset DY:t

Lause

Jos funktiot a_i ja b ovat jatkuvia, ovat epähomogeenisen DY:n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

kaikki ratkaisut muotoa

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + y_0,$$

missä $y_1, \ldots, y_n$ ovat homogeenisen DY:n riippumattomat ratkaisut ja y_0 epähomogeenisen DY:n yksittäisratkaisu.

Vertaa:

Yhtälöryhmän $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ kaikki ratkaisut ovat muotoa $c_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_k\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{x}_0$, missä $\boldsymbol{x}_i$ ovat homogeenisen ryhmän $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ riippumattomat ratkaisut ja $\boldsymbol{x}_0$ alkuperäisen ryhmän yksittäisratkaisu.

Määritelmä

Ääretön vektorijoukko on lineaarisesti riippumaton jos sen jokainen osajoukko on.

Lause

Joukko $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ on lineaarisesti riippumaton

Lause

Joukko $\{e^{\lambda t} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ on lineaarisesti riippumaton.

Huomautus

Vakiokertoimisen homogeenisen DY:n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

ratkaisuja voidaan löytää yritteellä $y = e^{\lambda t}$: Tällöin $y' = \lambda e^{\lambda t}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$, ..., $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t}$ ja sijoittamalla saadaan

$$a_n \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \ldots + a_2 \lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

ja jakamalla $e^{\lambda t}$ pois

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Algebran peruslauseen mukaan tällä *karakteristisella yhtälöllä* on ratkaisu.

Lineaariset DY:t

Lause

Jos λ_i on karakteristisen yhtälön j-kertainen juuri, on vakiokertoimisella homogeenisella DY:llä lineaarisesti riippumattomat ratkaisut

$$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, t^2 e^{\lambda_i t}, \ldots, t^{j-1} e^{\lambda_i t}.$$

Huomautus

Jos karakteristisella polynomilla on kompleksinen juuri λ, on myös tämän liittoluku $\overline{\lambda}$ myös ratkaisu. Jos halutaan pidättäytyä reaalisissa ratkaisuissa, merkitään $\lambda = \alpha + i\beta$ ja ratkaisut $e^{\lambda t}$ ja $e^{\overline{\lambda} t}$ voidaan korvata reaalisilla ratkaisuilla $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ ja $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

Epähomogeeninen DY

Epähomogeeninen, vakiokertoiminen DY

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

voidaan ratkaista seuraavasti:

- Etsitään kaikki homogeenisen DY:n ratkaisut y_1, ..., y_n yritteellä $y = e^{\lambda t}$.
- Etsitään epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu y_0 yritteellä kokeilemalla tai Laplace-muunnosten avulla.
- Kaikki ratkaisut ovat tällöin muotoa $y = c_1 y_1 + \ldots c_n y_n + y_0$.

Yksittäisratkaisun etsiminen yritteellä

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$

- Jos $b(x)$ on astetta n oleva polynomi, yritä astetta n olevaa polynomia.
- Jos $b(x) = ae^{kx}$ (tai $a \cos kx$ tai $a \sin kx$), yritä ratkaisua $y = Ae^{kx}$ (tai $A_1 \cos kx + A_2 \sin kx$).
- Jos b on edellämainittujen tulo, yritä samanmuotoista ratkaisua.
- Jos b on edellämainittujen summa, tee yrite jokaiselle summattavalle erikseen.
- Jos yrite sisältää termin, joka on homogeenisen DY:n ratkaisu, kerro se muuttujalla. Toista tarpeen vaatiessa.

Esimerkki

Etsitään DY:n $y' + y = e^{-t}$ kaikki ratkaisut. Aloitetaan homogeenisen yhtälön $y' + y = 0$ ratkaisuista, jotka saadaan sijoittamalla $y = e^{\lambda t}$. Näin ollen $\lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0$, josta $\lambda = -1$. Homogeenisen yhtälön ratkaisut ovat täten muotoa $y = ce^{-t}$, ja yksittäisratkaisun löytämiseksi valitaan yrite $y = Ae^{-t}$. Koska tämä on homogeenisen yhtälön ratkaisu, muutetaan yrite muotoon $y = Ate^{-t}$. Tällöin

$$y' = Ae^{-t} - Ate^{-t}$$

ja sijoittamalla yhtälöön saadaan

$$Ae^{-t} - Ate^{-t} + Ate^{-t} = e^{-t} \Leftrightarrow A = 1.$$

Näin ollen yleinen ratkaisu on $y = ce^{-t} + te^{-t}$.