Insinöörimatematiikka: Differentiaaliyhtälöt

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2024

Yksittäisratkaisun etsiminen yritteellä

Esimerki

- $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 1$
- $y'' + 3y' + 2y = \sin x$
- $y'' + 3y' + 2y = \sinh x$

Laplace-muunnos

Laplacen integraali

Funktion f Laplace-muunnos määritellään

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

Muotoa

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

olevaa integraalia sanotaan Laplacen integraaliksi.

Määritelmä

Olkoon $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funktio, jolla on jokaisella äärellisellä välillä vain äärellisen monta epäjatkuvuuspistettä. Jos integraali

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

suppenee jollain s:n arvolla, sanotaan, että f on originaalifunktio ja että sen Laplace-muunnos $F(s)$ on kuvafunktio. Lisäksi merkitään $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$.

Ominaisuudet

- Lineaarisuus: $\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$.
- Muuttujan skaalaus: $\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$.
- Kertominen eksponenttifunktiolla: $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s-a)$.
- Kuvafunktion derivointi: $F'(s) = -\mathcal{L}[tf(t)](s)$.
- Originaalifunktion derivointi: $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0+)$, missä $f(0+) = \lim\limits_{t\to 0+} f(t)$.
- Derivointisäännön yleistys: Jos funktiolla $f^{(n)}$ on Laplace-muunnos, niin

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f^{(n)}](s) &= s^n\mathcal{L}[f](s) \\ &\quad -s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+).\end{aligned}$$

Ominaisuudet

- Originaalifunktion integrointi: Jos f on originaalifunktio, on myös

$$g(t) = \int_0^t f(u)\,du$$

ja

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(u)\,du](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s).$$

Konvoluutio

Määritellään

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du.$$

Lause

- $f * g = g * f$,
- $f * (g * h) = (f * g) * h$,
- $f * (ah + bg) = af * h + bf * g$, ja
- $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$.

Lause

Jos $F(s)$ on kuvafunktio, on $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$

Lause

Jos $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, on

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s)e^{st}\, ds,$$

jos $t > 0$ ja x on suurempi kuin funktion f kasvueksponentti. Ylläoleva integraali tunnetaan nimellä Bromwichin integraali.

Lause

Jos f_1 ja f_2 ovat jatkuvia joukossa $[0, \infty)$ ja $\mathcal{L}[f_1] = \mathcal{L}[f_2]$, niin $f_1(t) = f_2(t)$, kun $t \in [0, \infty)$.

Yksittäisratkaisun etsimisestä

Laplace-muunnoksilla

Jos etsitään ratkaisua, jolle $y(0) = 0$, saadaan

$$\begin{aligned} & y' + y = e^{-t} \\ \Leftrightarrow \quad & sY + Y = \frac{1}{s+1} \\ \Leftrightarrow \quad & Y = \frac{1}{(s+1)^2}. \end{aligned}$$

Tästä saadaan (taulukon rivi 22)

$$y = te^{-t}$$

Osamurtohajotelmat

Esimerkki

$$
\begin{aligned}
& 2x+1+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x+1} \\
= \quad & \frac{(2x+1)(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+1)}+\frac{(x+1)}{(x+2)(x+1)}-\frac{2(x+2)}{(x+1)(x+2)} \\
= \quad & \frac{2x^3+7x^2+6x-1}{x^2+3x+2}
\end{aligned}
$$

Hajotelma toisinpäin

$$\frac{x^4+3x^2-x+1}{x^2+3x+1}=?$$

Osamurtohajotelmat

"Määritelmä"

Rationaalilausekkeen $\frac{p(x)}{q(x)}$ osamurtohajotelma on esitys

$$\frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \ldots + \frac{p_n(x)}{q_n(x)},$$

missä $a(x)$ on polynomi, $\deg(p_i) < \deg(q_i)$ ja $\deg(q_i)$ on mahdollisimman pieni.

Osamurtohajotelmat

Esimerkki

Jakokulmassa jakamalla saadaan

$$\frac{x^4+3x^2-x+1}{x^2+3x+1}=x^2-3x+11+\frac{-31x-10}{x^2+3x+1}.$$

Näin saatu hajotelma ei ole kaikkiin tarkoituksiin paras mahdollinen, sillä osoittaja on vielä astetta 1.

Osoittajan asteen vähentäminen

Osoittautuu, että osoittajien astetta voidaan vähentää jakamalla nimittäjä tekijöihin. Samalla summattavien määrä kasvaa.

Polynomien jaollisuudesta

Lause

Jos $\deg q \leq \deg(p)$ ja $q \neq 0$, saadaan jakokulmassa

$$p = aq + r,$$

missä a on osamäärä, r jakojäännös ja $\deg(r) < \deg(q)$.

Määritelmä

Polynomi p on *jaollinen* polynomilla q, tai q *jakaa* p*:n* tai q *on* p*:n tekijä*, merkitään $q \mid p$, mikäli $p = aq$ jollekin polynomille a.

Polynomien tekijöihinjako

$$z - 1 \big| \overline{\; z^3 \quad -4z^2 \quad +5z \quad -2 \;}$$

$$\begin{array}{r|llll} & z^2 & & & \\ \cline{2-5} z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \end{array}$$

Polynomien tekijöihinjako

$$
\begin{array}{r|llll}
 & z^2 & & & \\
\cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\
\end{array}
$$

Polynomien tekijöihinjako

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & z^2 & & & \\ \cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & -3z^2 & +5z & -2
\end{array}$$

Polynomien tekijöihinjako

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & z^2 & -3z & & \\
\cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & -3z^2 & +5z & -2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & z^2 & -3z & & \\
\cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & -3z^2 & +5z & -2 \\
 & & -3z^2 & +3z & \\
\end{array}
$$

Polynomien tekijöihinjako

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & z^2 & -3z & & \\
\cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & -3z^2 & +5z & -2 \\
 & & -3z^2 & +3z & \\
\cline{3-5}
 & & & 2z & -2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & z^2 & -3z & +2 & \\
\cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & -3z^2 & +5z & -2 \\
 & & -3z^2 & +3z & \\
\cline{3-5}
 & & & 2z & -2
\end{array}
$$

Polynomien tekijöihinjako

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & z^2 & -3z & +2 & \\
\cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & -3z^2 & +5z & -2 \\
 & & -3z^2 & +3z & \\
\cline{3-5}
 & & & 2z & -2 \\
 & & & 2z & -2
\end{array}
$$

Polynomien tekijöihinjako

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & z^2 & -3z & +2 & \\
\cline{2-5}
z-1 & z^3 & -4z^2 & +5z & -2 \\
 & z^3 & -z^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & -3z^2 & +5z & -2 \\
 & & -3z^2 & +3z & \\
\cline{3-5}
 & & & 2z & -2 \\
 & & & 2z & -2 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

Polynomien jaollisuudesta

Esimerkki

- $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, joten $(x-1) \mid (x^2-1)$ ja $(x+1) \mid (x^2-1)$
- $x^2 - 1 = 2(x+1) \cdot \frac{1}{2}(x-1)$, joten myös $2(x+1) \mid (x^2-1)$ ja $\frac{1}{2}(x+1) \mid (x^2-1)$
- Jos $p \mid q$, ja $c \neq 0$ vakio, on $q = pr = cp \cdot c^{-1}r$. Täten myös $cp \mid q$. Ei toimi, jos c ei ole vakio.
- Sanotaan, että polynomit $p(x)$ ja $cp(x)$ ovat *liitännäiset*, jos $c \neq 0$.

Suurin yhteinen tekijä

Määritelmä

Polynomien p ja q suurin yhteinen tekijä $d = \gcd(p, q)$ on polynomi, joka toteuttaa

- $d \mid p$ ja $d \mid q$
- d on jaollisuusrelaation suhteen maksimaalinen ylläolevat ehdot toteuttava.

Huomautus

Polynomien suurin yhteinen tekijä ei ole yksikäsitteisesti määrätty polynomi, vaan luokka toisilleen liitännäisiä polynomeja: Jos $d(x)$ toteuttaa yllämainitut ehdot, myös $cd(x)$, missä $c \neq 0$ toteuttaa ne.

Suurin yhteinen tekijä

Esimerkkejä

- $\gcd((x-2)(x-5),(x-1)(x+3)(x+2)) = 1$
- $\gcd((x-2)(x-5),(x-1)(x+3)(x-2)) = x-2$
- $\gcd((x-2)^4(x-1)(x+2),(x-2)(x-1)^3(x+3)) = (x-2)(x-1)$

Huomautus

Koska kaikki vakiopolynomit $c \neq 0$ ovat liitännäisiä 1:n kanssa, tarkoittaa $\gcd(p,q) = 1$ sitä, että polynomeilla p ja q on yhteisenä tekijänä vain vakio.